

УДК 539.3

## КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ РЕЗОНАНСЕ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ, доктор физико-математических наук, профессор  
А. В. ЯРОВАЯ, кандидат физико-математических наук, доцент

*Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь,  
г. Гомель, Беларусь*

Рассмотрены резонансные колебания упругого трехслойного стержня под действием локальных поверхностных нагрузок. Для описания кинематики несущих слоев приняты гипотезы Бернулли. В жестком сжимаемом заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты  $z$ . Получены аналитические решения задач, проведен их численный анализ. Исследована возможность проявления ложного резонанса.

**Ключевые слова:** трехслойный стержень, динамическая безопасность, резонанс.

**Введение.** Широкое применение слоистых систем в современных отраслях промышленности и в строительстве обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Одной из проблем в этом плане является требование выполнения безопасности как конструкций в целом, так и ее элементов при динамической нагрузке. Как правило, этого добиваются на стадии проектирования путем отстройки от резонанса, т. е. вычисляются частоты собственных колебаний элементов конструкций и сопоставляются с частотами возможных внешних гармонических воздействий. После этого принимаются меры по выведению низших частот собственных колебаний из опасной зоны.

Воздействие локальных статических нагрузок на трехслойные стержни рассмотрено в работах 1–3. В статьях 4–6 исследованы локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций, включая резонансные колебания трехслойных пластин с несжимаемым заполнителем. Здесь рассматриваются малые резонансные поперечные колебания несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем.

**Постановка задачи.** Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жестком сжимаемом по толщине заполнителе справедливы соотношения Коши с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты  $z$ . На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Деформации – малые. Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1).

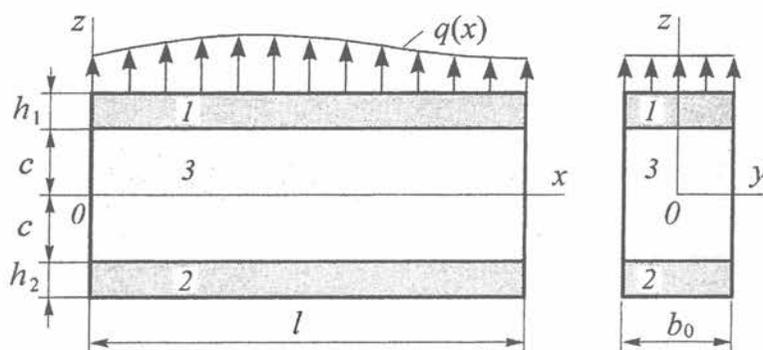


Рисунок 1 - Расчетная схема для трехслойного стержня

Распределенная поверхностная нагрузка  $q(x)$  приложена к первому слою. Исковыми считаются прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв  $w_k(x, t)$  и  $u_k(x, t)$ , ( $k = 1, 2$ ). Через  $h_k$  и  $\rho_k$  обозначены толщина и плотность материала  $k$ -го слоя;  $h_3 = 2c$ ;  $b$  – ширина стержня. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине  $l$ .

В соответствии с принятыми кинематическими гипотезами продольные и поперечные перемещения в слоях  $u^{(k)}(x, z)$  и  $w^{(k)}(x, z)$  можно выразить через четыре искомые функции  $w_1(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $w_2(x)$  и  $u_2(x)$  следующими соотношениями:

– в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left( z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left( z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c),$$

– в заполнителе

$$u^{(3)} = \left( 1 + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left( 1 - \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1)$$

где  $z$  – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций следуют из соотношений Коши и выражений для перемещений (1). Уравнение движения, рассматриваемого трехслойного стержня, получим, применяя вариационный принцип Лагранжа с учетом работы сил инерции:

$$\delta A - \delta W = \delta A_I, \quad (2)$$

где  $\delta A$  – вариация работы внешних сил,  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости,  $\delta A_I$  – вариация работы сил инерции.

При определении работы внешних сил считаем, что к внешней поверхности первого несущего слоя приложены произвольная распределенная нагрузка  $q(x)$  (см. рис. 1), а к торцам стержня – некоторые усилия и моменты. Тогда

$$\delta A = b \int_0^l q \delta w_1 dx; \quad \delta W = b \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} \delta \varepsilon_{zz}^{(3)} dz \right] dx;$$

$$\delta A_I = b \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[ \rho_k (\ddot{w}^{(k)} \delta w^{(k)} + \ddot{u}^{(k)} \delta u^{(k)}) \right] dz dx, \quad (3)$$

где две точки над перемещениями обозначают вторую производную по времени,  $\sigma_{ij}^{(k)}$  – компоненты тензора напряжений в  $k$ -м слое.

Выразив вариации деформаций и напряжений в (3) через перемещения и подставив в (2), получим следующую систему уравнений движения в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + \\ a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 = 0; \\ -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_3 w_{1,x} - a_{10} w_{2,x} - a_{17} w_{1,xxx} + \\ 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 = 0; \\ -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\ + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} = q; \\ -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\ - a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 + m_2 \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь коэффициенты выражаются через механические модули сдвига  $G_k$  и объемной деформации  $K_k$  и геометрические параметры стержня:

$$a_1 = \frac{G_3}{2c}, \quad a_2 = \frac{G_3}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad a_3 = \frac{G_3}{2} \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}; \quad a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3};$$

$$a_5 = \frac{K_3^+ c}{3};$$

$$a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}; \quad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6}; \quad a_8 = \frac{K_3^+}{2c}; \quad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3};$$

$$a_{10} = \frac{G_3}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2};$$

$$a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6};$$

$$a_{12} = \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{G_3 c}{6};$$

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6}; \quad a_{14} = \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \\
 a_{15} &= \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}; \\
 a_{16} &= \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}; \quad a_{17} = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k, \\
 m_1 &= \rho_1 h_1 + \frac{2}{3} \rho_3 c, \quad m_2 = \rho_2 h_2 + \frac{2}{3} \rho_3 c, \quad m_3 = \frac{\rho_1 h_1^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_1^2}{6}, \\
 m_4 &= \frac{\rho_2 h_2^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_2^2}{6}, \\
 m_5 &= \frac{\rho_3 c h_1}{6}, \quad m_6 = \frac{\rho_3 c h_1 h_2}{12}, \quad m_7 = \frac{\rho_3 c h_2}{6}, \quad m_8 = \frac{\rho_3 c}{3}.
 \end{aligned}$$

Граничные условия свободного опирания стержня по торцам ( $x = 0; 1$ ) на неподвижные в пространстве жесткие опоры в перемещениях имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (5)$$

Начальные условия движения (перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоев) принимаем нулевыми, что не уменьшает общности решений, но делает выкладки менее громоздкими.

Для решения начально-краевой задачи (4), (5) искомые перемещения  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  и нагрузка  $q(x, t)$  представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющим принятым граничным условиям (5):

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(\pi m x) T_{m1}(t); \quad u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(\pi m x) T_{m2}(t); \quad w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) T_{m3}(t); \\
 w_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) T_{m4}(t); \quad q(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) q_m(t), \quad q_m(t) = 2 \int_0^1 q(x, t) \sin(\pi m x) dx, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где  $T_{mi}(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – неизвестные функции времени;  $q_m(t)$  – коэффициенты разложения нагрузки в ряд.

Подстановка выражений (6) в (4), приводит к системе уравнений для определения функций  $T_{mi}(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), которая в матричном виде следующая:

$$[B]\{T\} + [M]\{\ddot{T}\} = \{Q\}. \quad (7)$$

Здесь  $[B]$  – квадратная матрица четвертого порядка, элементы которой  $B_{mij}$  определяются через параметры  $b_i$ , зависящие от  $m$  и выражающиеся через коэффициенты  $a_i$ ;  $[M]$  – диагональная матрица четвертого порядка с элементами  $M_{mij}$ ;  $\{T\}$  и  $\{\ddot{T}\}$  – вектор-столбцы, сформированные из искомым функций времени  $T_{mi}$  и их вторых производных;  $\{Q\}$  – вектор, элементы которого  $Q_{mk}$  составлены из коэффициентов  $q_m(t)$ :

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & b_8 & b_9 \\ b_4 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}, \quad \{T\} = \begin{bmatrix} T_{m1} \\ T_{m2} \\ T_{m3} \\ T_{m4} \end{bmatrix}, \quad \{Q\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\ddot{T}\} = \begin{bmatrix} \ddot{T}_{m1} \\ \ddot{T}_{m2} \\ \ddot{T}_{m3} \\ \ddot{T}_{m4} \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 + m_3 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 + m_4 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Для замыкания задачи сюда необходимо добавить начальные условия.

**Собственные колебания.** При собственных колебаниях предполагается, что внешняя нагрузка в (7) отсутствует  $Q_{mk}(x, t) = 0$ . Решение полученной системы представляется в виде:

$$T_{mk}(t) = A_{mk} \sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \quad (8)$$

где  $A_{mk}$  – амплитуда,  $\alpha_{mk}$  – начальная фаза и  $\omega_m$  – частота колебаний.

Подстановка выражения (8) в однородную систему, соответствующую (7) приводит к обобщенной задаче на собственные значения. Получаемая система алгебраических уравнений однородна относительно амплитуд  $A_{mk}$ . Нулевое решение в рассматриваемом случае означает отсутствие колебаний. Для нахождения нетривиального решения необходимо потребовать равенство нулю ее определителя. Это приводит к алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно  $\omega_k^2$ . Решив его, получим четыре вещественных неотрицательных корня. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра  $m$  оказывается четырехчастотным. Следовательно, решение (8) нужно принять в виде:

$$T_{mk}(t) = \sum_{i=1}^4 A_{mki} \sin(\omega_{mi} t + \alpha_{mi}).$$

Численное исследование частот и форм колебаний проводилось для трехслойного стержня, набранного из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т [1].

**Вынужденные колебания.** Для вынужденных колебаний образуем вспомогательные зависимости. Функции  $T_{mk}(t)$  представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^4 \delta_{mki} \zeta_{mi} \quad \left( \sum_{i=1}^4 \delta_{mik}^2 = 1 \right), \quad (9)$$

где  $\delta_{mki}$  – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции  $\zeta_{mi}(t)$  определяются из системы уравнений

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t), \quad \tilde{q}_{mi} = \sum_{k=1}^4 Q_{mk} \delta_{mki} / \sum_{k=1}^4 M_{mkk} \delta_{mki}^2. \quad (10)$$

Общее решение (10) будет иметь вид

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi}t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi}t) + \frac{1}{\omega_{mi}} \int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau)) \tilde{q}_{mi}(\tau) d\tau. \quad (11)$$

В случае резонанса дифференциальное уравнение (10) принимает вид

$$\ddot{\zeta}_{mi}(t) + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi}(t) = \tilde{E}_m \sin(\omega_{nk}t), \quad \tilde{E}_m = E_m \delta_{m3i} / \sum_{k=1}^4 M_{mkk} \delta_{mki}^2.$$

Общее решение в случае возникновения резонанса можно получить из (11) в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi}t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi}t) + y_{mi}(t),$$

$$y_{mi}(t) = \begin{cases} \frac{\tilde{E}_m}{(\omega_{mi}^2 - \omega_{nk}^2)} \sin(\omega_{nk}t) & m \neq n \text{ или } i \neq k, \\ -\frac{\tilde{E}_m}{2\omega_{mi}} t \cos(\omega_{mi}t) & m = n, i = k. \end{cases}, \quad q_m = E_m \sin(\omega_{nk}t), \quad (12)$$

Константы интегрирования  $A_{mi}$ ,  $B_{mi}$  следуют из начальных условий и решения (12).

**Результаты.** Рассмотрим поперечные колебания упругих трехслойных стержней под действием гармонических резонансных нагрузок, то есть нагрузок, частота которых совпадает с одной из собственных частот колебаний системы. Для аналитической записи нагрузок воспользуемся единичной функцией Хевисайда  $H_0(x)$  [1].

На рассматриваемый стержень действует резонансная поверхностная гармоническая нагрузка, равномерно распределенная внутри интервала  $0 \leq x \leq a \leq 1$ .

$$q(x, t) = q_0 H_0(a - x) \sin(\omega_{mk}t). \quad (13)$$

Подставляя (13) в формулу (12), получаем параметры нагрузки

$$E_m = \frac{2q_0}{\pi m} (1 - \cos(\pi m a)) \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

Функция времени определяется выражением (9) с учетом (14).

Если коэффициент  $E_m = 0$ , то мы имеем явление, называемое ложным резонансом – частота возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот колебаний трехслойного стержня, однако нарастания амплитуды колебаний не происходит. Ложный резонанс здесь может иметь место при  $\cos(\pi m a) = 1$ , или  $a = \frac{2p}{m} \leq 1$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ).

Численный счет проводился для трехслойного стержня единичной длины, слои которого набраны из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т. Относительные толщины слоев принимались  $h_1 = 0,01$ ,  $h_2 = 0,05$ ,  $c = 0,09$ . Амплитуда интенсивности поверхностной нагрузки  $q_0 = 6,4 \cdot 10^3$  Па. При вычислении перемещений исследовалась сходимость рядов в (6). Результаты показали, что достаточно ограничиться пер-

выми 14 слагаемыми, т. к. последующие 36 членов ряда вносят поправку, не превышающую 0,05 %.

Перемещения вдоль оси стержня при резонансе по частоте  $\omega_{11}$  и длинах пятна нагрузки  $a = 0,25; 0,5; 0,75; 1$  (номера кривых соответственно возрастают) в момент  $t = 1$  с приведены на рис. 2.

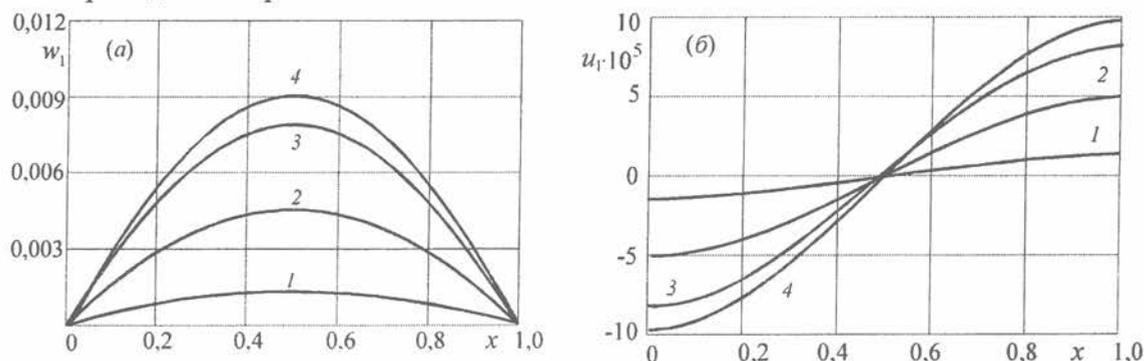


Рисунок 2 - Графики зависимости прогиба (а) и продольного перемещения (б) первого слоя вдоль оси стержня при различной протяженности нагрузки

Прогибы достигают максимума примерно в центре стержня и не меняют своего знака вдоль его оси. Здесь следует отметить, что уменьшение пятна нагрузки до  $a = 0,02$  вызывает отклонение максимума прогиба от срединного сечения в сторону нагрузки не более чем на 5 % длины стержня. Постепенное увеличение размеров пятна приводит к сдвигу максимума прогиба в сторону центра стержня, который достигается при  $a = 1$ . Тангенциальные перемещения меняют знак в центре стержня и максимальны на его краях.

**Выводы.** Таким образом, предложенная математическая модель трехслойного стержня позволяет описывать его поперечные колебания в области резонанса. В каждом из рассмотренных видов резонансного (по низшей частоте) воздействия, наиболее опасной (вызывающей большие перемещения) оказывалась статически эквивалентная поверхностная нагрузка, стянутая к центру стержня. При совпадении частоты возмущающей нагрузки с некоторыми собственными частотами колебаний стержня наблюдается явление ложного резонанса.

### Обозначения

$\rho_k$  – плотность материала  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$ );  $q(r, t)$  – внешняя распределенная нагрузка;  $q_n(t)$  – коэффициенты разложения нагрузки в ряд по собственным функциям;  $q_0$  – интенсивность распределенной поверхностной нагрузки;  $w_1, w_2$  – прогибы несущих слоев стержня;  $u_1, u_2$  – горизонтальное перемещение срединной поверхности несущих слоев;  $G_k, K_k$  – модули сдвига и объемной деформации;  $l$  – длина стержня;  $T_{mk}(t)$  – функция времени;  $\delta_{mki}$  – собственные формы колебаний;  $A_n, B_n$  – константы интегрирования;  $h_1, h_2, h_3 = 2c$  – толщины слоев;  $H_0$  – функция Хевисайда.

**Литература**

1. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Cheng Zhenqiang, Jemah A. K., Williams F. W. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996.63, N 4. P. 1019–1026.
3. Ebsioglu J. K. On the theory on sandwich panels in the reference state // Internal. J. Eng-ng Sci. 1966. N 6. P. 166–194.
4. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
5. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Яровая А.В. Колебания круговых трехслойных пластин под действием резонансных нагрузок // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 12 – С. 114 – 120.
6. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая. Особенности колебаний трехслойного стержня при локальных и импульсных воздействиях // Прикл. механика. 2005. Т. 41, № 7 - С. 122–129.

**E.I. Starovoitov, A. V. Yarovaya. Resonance fluctuations of sandwich beam**

Considered fluctuations under resonance sandwich beam with filler under the action of local surface loads. For the kinematics description of carryings layers accepted the hypotheses Bernoulli. In hard compressed filler the precise ratio of a theory of elastic strength with linear approximating of movements of his its points from cross-sectional coordinate  $z$  are fair. Received the analytical deciding and conducted their numeric analysis. The capability of a development of a false resonance is investigated.