

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

С.А. ВОРОБЬЕВ, кандидат физико-математических наук

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь*

Представлены уравнения движения трехслойного упругого стержня с учетом внутреннего трения в материалах слоев на основе модели В. Фойгта (W. Voigt). Для исследования свободных и стационарных вынужденных колебаний используются методы Фурье и комплексных амплитуд. Исследованы спектры собственных частот идеального трехслойного стержня и с учетом внутреннего демпфирования, дан сравнительный анализ. Получены амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики. Сделан вывод о некорректности вязкой модели трения в проблеме исследования свободных и вынужденных колебаний трехслойного стержня.

**Ключевые слова:** трехслойный стержень, вязкое трение, собственная частота, комплексная частота, свободные колебания, вынужденные колебания.

**Введение.** Элементы слоистых конструкций, в частности трехслойных, широко используются в строительстве, на транспорте (воздушном, речном), в средствах защиты (бронезилеты). Это обусловлено наличием у них ряда положительных качеств: высокие показатели удельной прочности и жесткости, демпфирующей способности, хорошие теплофизические свойства.

Внутреннее трение (сопротивление) в конструкционных материалах приводит к диссипации энергии колебаний и в большинстве случаев играет положительную роль при эксплуатации различных машин, механизмов под действием динамических нагрузок. Главным образом благодаря внутреннему сопротивлению происходит затухание свободных колебаний, весьма заметное ограничение амплитуд резонансных колебаний конструкций, наблюдается снижение уровня напряжений от импульсных воздействий и ударов. Указанные причины вызывают необходимость учета сил внутреннего демпфирования в динамических расчетах, что позволяет их уточнить, и, как следствие, повысить эксплуатационные характеристики и экономические показатели проектируемого оборудования, устранить ложные прогнозы его аварийного останова.

Первые работы по учету сил внутреннего трения в материалах при колебаниях механических систем датируются второй половиной девятнадцатого века. За это время исследователями было предложено огромное количество моделей трения, но, пожалуй, ни одна из них не является непротиворечивой. Это объясняется исключи-

тельной сложностью проблемы при ее несомненной важности для прикладных задач динамики инженерных конструкций.

Обзор основных моделей внутреннего трения, используемых в расчетах, можно найти, например, в работах [1, 2].

Цель данной работы – выяснить возможность использования и оценить пригодность вязкой модели трения, являющейся по сути классической, в динамических расчетах трехслойного стержня, установить влияние сил сопротивления на его частотные характеристики.

**Постановка задачи.** Рассматривается трехслойный стержень, несимметричный относительно срединной плоскости несжимаемого жесткого заполнителя. Материалы слоев линейно-упругие, изотропные, однородные. Поперечное сечение каждого слоя – прямоугольник с основанием  $b=1$  и постоянной толщиной  $2h_k$  ( $k=1,2,3$ ). Верхнему несущему слою соответствует индекс  $k=1$ , нижнему –  $k=2$ , внутреннему заполнителю –  $k=3$ . Начало прямоугольной системы координат связано с левым торцом балки, ось продольной координаты  $x$  совмещена со срединной плоскостью заполнителя, ось  $z$  – перпендикулярно вверх первому несущему слою. Считаем, что закрепление кромок несущих слоев осуществляется идеальными мембранами, установленными на срезах торцов. На внешние поверхности несущих слоев могут действовать распределенные нагрузки, проекции которых на оси  $x, z$  –  $p^{(k)}(x,t)$ ,  $q^{(k)}(x,t)$  соответственно.

На основании вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, используя гипотезы Тимошенко для каждого слоя и условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев, получаем уравнения движения идеальной модели стержня в перемещениях:

$$[M]\{\dot{U}\} + [L]\{U\} = \{F\}, \quad (1)$$

где  $\{U\}^T = \{u, w, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}\}$  – искомая вектор-функция,  $u(x,t)$  – продольные перемещения точек срединной плоскости заполнителя,  $w(x,t)$  – прогиб,  $\psi^{(k)} = -w_{,x} + \gamma_{xz}^{(k)}$  – полный угол поворота прямолинейного элемента в  $k$ -ом слое,  $\gamma_{xz}^{(k)}$  – поперечный сдвиг;  $\{F\}^T = \{p^{(1)} + p^{(2)}, q^{(1)} + q^{(2)}, 0, 0, 0\}$  – вектор нагрузок;  $[M] = \text{diag}[m_1, \dots, m_5]$  – матрица масс, характеризующая инерционные свойства стержня

$$m_1 = m_2 = 2 \sum_{i=1}^3 \rho_i h_i; \quad m_l = 8\rho_j h_j^3 / 3, \quad (l=3, j=1; l=4, j=2); \quad m_5 = 2h_3^2 (\rho_3 h_3 / 3 + \sum_{i=1}^2 \rho_i h_i).$$

$[L] = [l_{ij}]$  ( $i, j = \bar{1}, \bar{5}$ ) – матрица, элементы которой – линейные дифференциальные операторы по переменной  $x$ :

$$l_{11} = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{12} = 0; \quad l_{13} = a_{13} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{14} = a_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{15} = a_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{21} = 0; \quad l_{22} = a_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

$$l_{23} = a_{23} \frac{\partial}{\partial x}; \quad l_{24} = a_{24} \frac{\partial}{\partial x}; \quad l_{25} = a_{25} \frac{\partial}{\partial x}; \quad l_{31} = a_{31} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{32} = a_{32} \frac{\partial}{\partial x}; \quad l_{33} = a_{33}^0 + a_{33} \frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

$$l_{34} = 0; \quad l_{35} = a_{35} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{41} = a_{41} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{42} = a_{42} \frac{\partial}{\partial x}; \quad l_{43} = 0; \quad l_{44} = a_{44}^0 + a_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{45} = a_{45} \frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

$$l_{51} = a_{51} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{52} = a_{52} \frac{\partial}{\partial x}; \quad l_{53} = a_{53} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{54} = a_{54} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad l_{55} = a_{55}^0 + a_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где

$$a_{11} = -2 \sum_{i=1}^3 E_i h_i; \quad a_{13} = -2E_1 h_1^2; \quad a_{14} = 2E_2 h_2^2; \quad a_{15} = -2h_3(E_1 h_1 - E_2 h_2); \quad a_{22} = -2 \sum_{i=1}^3 G_i h_i;$$

$$a_{23} = -2G_1 h_1; \quad a_{24} = -2G_2 h_2; \quad a_{25} = -2G_3 h_3; \quad a_{31} = -2E_1 h_1^2; \quad a_{32} = a_{33}^0 = 2G_1 h_1; \quad a_{33} = -8E_1 h_1^3 / 3;$$

$$a_{35} = -2E_1 h_1^2 h_3; \quad a_{41} = 2E_2 h_2^2; \quad a_{42} = a_{44}^0 = 2G_2 h_2; \quad a_{44} = -8E_2 h_2^3 / 3; \quad a_{45} = -2E_2 h_2^2 h_3;$$

$$a_{51} = -2h_3(E_1 h_1 - E_2 h_2); \quad a_{55} = -2h_3^2(E_3 h_3 / 3 + \sum_{i=1}^2 E_i h_i); \quad a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = 0;$$

$$a_{52} = a_{55}^0 = 2G_3 h_3; \quad a_{53} = -2E_1 h_1^2 h_3; \quad a_{54} = -2E_2 h_2^2 h_3.$$

В уравнениях (1)  $E_k, G_k$  – модули Юнга первого и второго рода соответственно. Подробности постановки этой задачи и уравнения движения трехслойного стержня, полученные при других гипотезах, представлены в работе [3].

Упругие несовершенства материалов слоев стержня по теории вязкого трения учитываются путем замены в системе (1) модулей Юнга  $E_k$  на операторы  $E_k^* = (1 + \chi_k \cdot \partial / \partial t)$ , где  $\chi_k$  – коэффициент внутренней вязкости материала  $k$ -го слоя,  $t$ -время. Тогда уравнения движения вязкой модели трехслойного стержня можно представить в виде:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [B]\{\dot{U}\} + [L]\{U\} = \{F\}, \quad (2)$$

где  $[B] = [b_{ij}] (i, j = \bar{1}, \bar{5})$  – матрица демпфирования, элементы которой – линейные дифференциальные операторы по координате  $x$ , которые можно легко получить путем добавления множителей  $\chi_k$  при  $E_k$  в коэффициентах  $a_{ij}$ , содержащихся в  $[L_{ij}]$ . Точка сверху – частная производная по времени. Все остальные компоненты уравнений (2) идентичны (1).

В дальнейших исследованиях рассматривается трехслойный стержень, шарнирно опертый по торцам на жесткие неподвижные опоры. Однородные граничные условия в этом случае определяются такими соотношениями:

$$\begin{aligned} w(0, \tau) = w(1, \tau) = 0; \quad w_{,\xi\xi}(0, \tau) = w_{,\xi\xi}(1, \tau) = 0; \\ u_{,\xi}(0, \tau) = u_{,\xi}(1, \tau) = 0; \quad \psi_{,\xi}^{(k)}(0, \tau) = \psi_{,\xi}^{(k)}(1, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Запятая в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ней координате. Здесь и далее используются безразмерные параметры:

$$\xi = x' / L'; \quad h_k = h'_k / L'; \quad w = w' / L'; \quad u = u' / L'; \quad \omega^2 = (\omega')^2 \rho'_0 (L')^2 / P'_0; \quad \theta^2 = (\theta')^2 \rho'_0 (L')^2 / P'_0; \\ G_k = G'_k / P'_0; \quad E_k = E'_k / P'_0; \quad \rho_k = \rho'_k / \rho'_0; \quad \rho'_0 = 1 \text{ кг/м}^3; \quad P'_0 = 10^4 \text{ МПа}; \quad (k = 1, 2, 3),$$

где  $L'$  – длина стержня, штрих вверх означает размерную величину.

Для исследования свободных и стационарных вынужденных колебаний воспользуемся методами Фурье и комплексных амплитуд, представив искомые перемещения в следующем виде:

$$u(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi\xi) \tilde{U}_n e^{i\tilde{\omega}\tau}; \quad w(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \tilde{W}_n e^{i\tilde{\omega}\tau}; \\ \psi^{(k)}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi\xi) \tilde{\Psi}_n^{(k)} e^{i\tilde{\omega}\tau} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где  $\tilde{\Psi}_n^{(k)} = \Psi_n^{(k)} e^{i\varphi_n^{(k)}}$ ,  $\tilde{U}_n = U_n e^{i\varphi_n^{(4)}}$ ,  $\tilde{W}_n = W_n e^{i\varphi_n^{(5)}}$  – комплексные амплитуды перемещений,  $\tilde{\omega} = a + ib$  – комплексная частота,  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $a, b, \Psi_n^{(k)}, U_n, W_n$  – действительные величины. В случае вынужденных колебаний вместо  $\tilde{\omega}$  используется действительный частотный параметр  $\theta$ . Подстановка (4) в уравнения (2) приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд. Очевидно, коэффициенты этих систем будут функциями  $\tilde{\omega}$  или  $\theta$  в зависимости от того, какие колебания (свободные или вынужденные) рассматриваются. Принимая  $\{F\} \equiv 0$  в (2), получаем характеристические уравнения десятого порядка с комплексными коэффициентами для исследования спектров частот расчетных моделей стержня. Стационарное решение систем уравнений (2) от воздействия сосредоточенной нагрузки  $q(\xi, \tau) = F_0 \cdot \delta(\xi - \xi_l) e^{i\theta\tau}$  находим стандартными методами ( $\xi_l$  – координата сечения, в котором она приложена,  $\delta(\xi)$  – дельта-функция).

**Численные результаты.** Частотные характеристики исследовались для стержня с толщинами  $h_1 = h_2 = 0,01$ ;  $h_3 = 0,03$ . В качестве материалов несущих слоев принимался алюминиевый сплав Д16Т, материал заполнителя – фторопласт-4. Коэффициенты неупругого сопротивления  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,01$ ;  $\gamma_3 = 0,1$ . Таким образом, при частоте возбуждения  $\theta = \text{const}$  принимаем  $\chi_k = \gamma_k / \theta$ , а при свободных колебаниях  $\chi_k = \gamma_k / \omega_0$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $\omega_0$  – частота основного тона собственных колебаний трехслойного стержня без учета демпфирования.

На рисунке 1 представлены амплитудно-частотная поверхность, а на рисунке 2 – фазо-частотная поверхность вязкой модели, которые позволяют представить общую картину изменения этих характеристик по длине стержня.

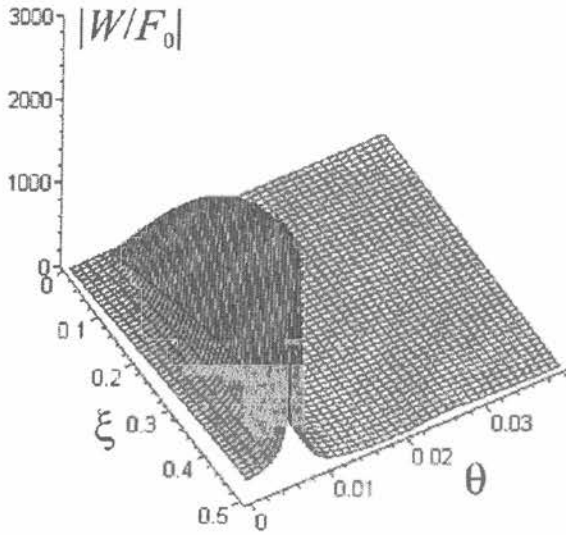


Рисунок 1 - Амплитудно-частотная характеристика трехслойного стержня с учетом сил внутреннего трения в материалах на основе вязкой модели

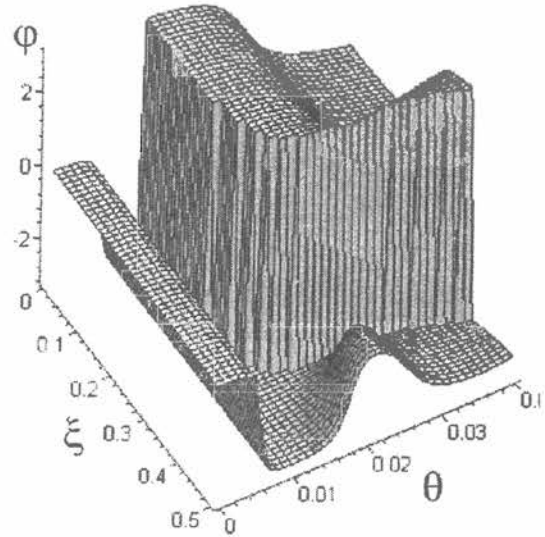


Рисунок 2 - Фазо-частотная характеристика трехслойного стержня с учетом сил внутреннего трения в материалах на основе вязкой модели

Из рисунка 1 хорошо видно, что при величине параметра  $\theta = \omega_0$  (резонанс по частоте основного тона) амплитуда колебаний, хотя и ограничена, но ее значение намного превосходит статическое перемещение ( $\theta = 0$ ). По мере возрастания  $\theta$  амплитуды колебаний быстро убывают, не превышая по величине даже статические перемещения от действия сосредоточенной нагрузки. Детальную картину изменения амплитудно-частотных (АЧХ) и фазо-частотных характеристик (ФЧХ) как функций  $\xi$  или  $\theta$  дают разрезы соответствующих поверхностей при  $\xi = const$  и  $\theta = const$ .

Теория вязкого внутреннего трения весьма удобна в расчетах, но она не подтверждается экспериментальными данными для металлов [2], или дает результаты, зачастую противоречащие сложившимся представлениям по механике хорошо изученных процессов. В частности для однородного стержня в работе [1] показано, что спектр собственных частот вязкой модели с возрастанием номера тона изменяется весьма странным образом, в сравнении с идеальной моделью.

Подобные противоречия можно увидеть на рисунке 3, где показаны участки спектров собственных частот  $\omega_{4,n}$  двух моделей трения трехслойного стержня ( $n$  – номер тона собственных колебаний).

У модели стержня без учета сил трения с увеличением  $n$  частоты  $\omega_{i,n}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) монотонно возрастают (сплошная линия). Чего нельзя констатировать для вязкой модели (штрихпунктирная линия).

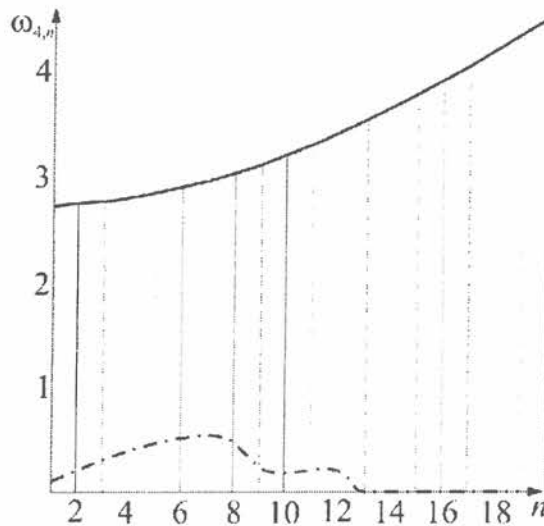


Рисунок 3 - Изменение собственных частот трехслойного стержня в зависимости от номера тона собственных колебаний идеального стержня (сплошная линия) и с учетом сил внутреннего трения (штрихпунктирная линия)

**Выводы.** Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что динамические расчеты, выполненные на основе вязкой модели, в узком интервале частот вполне согласуются с механикой процесса деформирования реальной конструкции. Однако, они могут оказаться малопригодными в широком диапазоне изменения параметров нагружения и физико-механических, геометрических характеристик стержня. Таким образом, необходима корректировка вязкой модели внутреннего демпфирования. Возможно, коэффициент вязкости должен менять свою величину для различных форм собственных колебаний.

Несмотря на малую величину сил внутреннего сопротивления их учет необходим, в частности, при исследовании стационарных колебаний в областях резонанса. Пренебрежение трением в этих случаях может привести к значительным искажениям амплитуд перемещений и напряжений. Так, например, при  $\theta \approx \omega_{1,1}$  отношение  $A_I / A_V \approx 62$  (индекс  $I$  – идеальная модель,  $V$  – вязкая). В других резонансных областях это отношение составляет более тридцати единиц.

### Обозначения

$2h_k$  – толщина  $k$ -го слоя;  $u(x,t)$  – продольные перемещения точек срединной плоскости заполнителя;  $w(x,t)$  – прогиб;  $\psi^{(k)} = -w_{,x} + \gamma_{xz}^{(k)}$  – полный угол поворота прямолинейного элемента в  $k$ -ом слое;  $\gamma_{xz}^{(k)}$  – поперечный сдвиг;  $[M] = \text{diag}[m_1, \dots, m_5]$  – матрица масс;  $[L] = [L_{ij}]$  ( $i, j = \bar{1}, \bar{5}$ ) – матрица, элементы которой – линейные дифференциальные операторы по переменной  $x$  с постоянными коэффициентами, которые выражаются через геометрические и механические параметры слоев стержня;  $E_k, G_k$  – модули упругости материала  $k$ -го слоя;  $\chi_k$  – коэффи-



циент внутренней вязкости материала  $k$ -го слоя;  $[B] = [b_{ij}] (i, j = \overline{1, 5})$  – матрица демпфирования;  $\xi$  – безразмерная продольная координата;  $\theta$  – безразмерный частотный параметр изменения вибрационной нагрузки;  $\omega$  – безразмерная собственная частота;  $\rho_k$  – безразмерная плотность материала  $k$ -го слоя;  $i$  – мнимая единица;  $\tilde{\omega}$  – комплексная частота;  $\Psi_n^{(k)}, U_n, W_n$  – амплитудные значения угловых и линейных перемещений;  $\delta(\xi)$  – дельта-функция;  $q(\xi, \tau)$  – интенсивность поперечной нагрузки;  $\tau$  – время в относительных единицах;  $\gamma_k$  – коэффициент неупругого сопротивления  $k$ -го слоя;  $\varphi_n^{(j)}$  – начальный фазовый угол сдвига на  $n$ -ой гармонике колебаний;  $F_0$  – амплитудное значение вибрационной нагрузки.

### Литература

1. Кочнева Л.Ф. Внутренне трение в твердых телах при колебаниях. – М.: Наука, 1979. 96 с.
2. Нашиф А, Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. 448 с.
3. Воробьев С.А. Исследование спектра частот собственных колебаний трехслойного стержня на основе различных моделей // Материалы IX Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. – М.: МАИ, 2003. С. 183-190.

#### S. A. Vorobyov Investigation of frequency responses of a sandwich beam on the base of viscous model of damping

Equations of motion of a sandwich elastic beam with taking into account internal damping in materials of layers on the base of Voigt model are given. Methods of Fourier and complex amplitudes are used in analysis of free and stationary forced vibrations. Spectrums of fundamental frequencies of ideal and damped sandwich beams were examined, comparative analysis was given. Amplitude and phase-frequency responses were obtained. Conclusion about incorrectness of viscous model of damping in the problem of investigation of free and forced vibrations of a sandwich beam was done.