УДК 517.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

В. А. БЕЛЬСКИЙ

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, г. Гомель, Беларусь

В работе сделана попытка использовать отражающую функцию для построения математических моделей чрезвычайных ситуаций. Произведена оценка работоспособности полученной модели на реальных данных.

Ключевые слова: динамическая модель, отражающая функция, дифференциальное уравнение, параметры системы.

Введение. Устойчивый рост многообразия негативных факторов, влияющих на человека и окружающую среду, приводит как к увеличению числа опасных явлений, происходящих в обществе, природе и техносфере, так и к росту масштабов их проявлений. Большое количество влияющих факторов ведет к неопределенности и непредсказуемости чрезвычайных ситуаций. Поэтому важно уметь оценить каждый фактор, спрогнозировать его вклад в общую картину. Мы задаемся вопросами о том, какие данные отобрать для исследования, как правильно их обработать и какие выводы можно будет сделать. Как предотвратить негативное явление или минимизировать ущерб? Эти и многие другие вопросы приводят к созданию различных методов, методик и приемов для прогнозирования поведения изучаемой системы в условиях неопределенности. Некоторые из этих вопросов рассмотрены, например, в [1], где предлагается для их изучения путь, основанный на анализе и прогнозе рисков. Используемые сегодня методы, такие как статистические, вероятностные, метод экспертных оценок и другие не противоречат друг другу, но каждый имеет свои условия применимости, свои достоинства и трудности. И почти все они, в особенности статистические, требуют значительных массивов данных.

Попытки заглянуть в суть процессов, скрывающихся за статистической информацией, приводят нас к таким понятиям, как тория особенностей, теория бифуркаций положения равновесия, теория катастроф. Подробнее об этом написано в [2], где, в частности, под катастрофой понимается резкое изменение в поведении системы в ответ на непрерывное изменение внешних условий. В изучении катастроф, кризисных и чрезвычайных явлений может использоваться и уже отчасти используется мощный математический аппарат, основанный на идеях А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, Р. Тома и др. Поведение любой системы (технической, социальной, экономической, биосистемы и т. д.) может быть описано набором изменяющихся во времени параметров. Определенному набору таких параметров соответствует точка в так называемом фазовом пространстве, которая с течением времени описывает фазовую кривую. Особый интерес представляют замкнутые фазовые кривые (предельные циклы), так как именно им соответствуют устойчивые во времени процессы, происходящие в изучаемой системе. Устойчивость этих процессов во времени предполагает их повторяемость, периодичность. Это, в свою очередь, дает нам возможность прогнозировать характер изменения состояния системы. Автор предлагает сделать это, используя отражающую функцию, предложенную профессором В. И. Мироненко [3], которая явилась новым инструментом качественного анализа дифференциальных уравнений и систем, а, значит, и реальных систем, ими описываемых.

Метод отражающей функции только разрабатывается, исследуются границы его применимости, идет активный поиск новых приложений. Работа эта далека до завершения и поэтому способ, предложенный в настоящей работе, следует пока считать только идеей. Тем не менее, некоторые аспекты этой идеи уже сейчас представляются вполне реальными.

Постановка задачи и суть метода. Отражающая функция обладает свойством «временной симметрии», которое заключается в следующем. Обозначим за x - интересующий нас параметр (набор параметров) изучаемой системы. Пусть $x(-t)$ - состояние системы в момент времени $-t$ (например, в прошлом). Тогда отражающая функция $F(t,x)$ позволяет связать это состояние с будущим состоянием системы в «симметричный» момент времени t посредством формул:

$$F(t,x(t)) = x(-t), \quad F(-t,x(-t)) = x(t). \tag{1}$$

Используя эту функцию, нам хотелось бы построить модель, которая, с одной стороны, давала бы возможность предсказывать поведение системы, а с другой стороны, объясняла бы, почему изучаемые параметры изменяются именно так. Весьма желательно, чтобы эта модель помогла обнаружить качественные изменения в динамике исследуемого процесса (если таковые есть) и дать этому изменению правильную оценку.

Построение модели начинается со сбора соответствующих данных. Пусть у нас имеются сведения о количестве пожаров в определенном регионе за некоторый характерный промежуток времени T. Под словом «характерный» мы будем понимать некоторый законченный период времени, цикл (сутки, неделя, год и т. д). (Разумеется, предлагаемый метод может быть использован на данных различной природы и для разных видов чрезвычайных явлений и не только. Здесь мы говорим о пожарах лишь для определенности.) Разобьем промежуток T на $2n+1$ интервал. Это объясняется тем, что мы должны выбрать нулевой интервал (середину). Тогда все остальные интервалы должны располагаться относительно него симметрично:

интервалу k соответствует интервал $-k$ и т.д. Мы также предполагаем, что количество пожаров на каждом временном интервале нам известно, т.е. наши данные имеют вид (таблица 1):

Таблица 1 - Общий вид данных, используемых при построении модели

t	-n	-n+1	...	-1	0	1	...	n-1	n
x(t)	x(-n)	x(-n+1)	...	x(-1)	x(0)	x(1)	...	x(n-1)	x(n)

Для нашей модели будем искать отражающую функцию в виде

$$F(t,x) = e^{at}x\,, \tag{2}$$

где a - некоторая постоянная, которую нам предстоит определить. Формально, выбор отражающих функций весьма широк и об особенностях этого выбора мы еще будем говорить, а пока лишь отметим, что он ограничен начальным условием $F(0,x) = x$.

После того как общий вид отражающей функции определен, вычисляем константу a. Ее мы определим из системы $2n$ соотношений, которую составим по имеющимся данным, применяя формулы (1):

$$\begin{cases} e^{an}\cdot x(n) = x(-n), \\ e^{a(n-1)}\cdot x(n-1) = x(-n+1), \\ \quad\vdots \\ e^{a}\cdot x(1) = x(-1), \\ \quad\vdots \\ e^{a(-n)}\cdot x(-n) = x(n) \end{cases} \tag{3}$$

Конечно, знака равенства в каждом из соотношений (3) быть не может: уравнений $2n$, а параметр один. Будем пользоваться обычными методами статистики (например, методом наименьших квадратов) и определим a таким образом, чтобы сумма невязок $\sum_{i=-n}^{n}\varepsilon_i^2$ была наименьшей, т.е.

$$\sum_{i=-n}^{n}\varepsilon_i^2 = \sum_{i=-n}^{n}[e^{ai}x(i) - x(-i)]^2 \to \min\,. \tag{4}$$

Таким образом, будет построена отражающая функция $F(t,x) = e^{at}x$.

Нашей целью является построением динамической модели изучаемого явления, т. е. модели, которая бы связывала параметры процесса со скоростями изменения этих параметров. Такой моделью может служить дифференциальное уравнение или, в общем случае, система дифференциальных уравнений. Искомое дифференциальное уравнение, согласно [3, с. 75], может быть построено в виде:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}F_t F_x^{-1} + F_x^{-1}R(t,x) - R(-t,F)\,, \tag{5}$$

где $F = F(t,x)$ - отражающая функция, а $R(t,x)$ - произвольная непрерывная функция.

Тогда, как следует из [3], все дифференциальные уравнения, обладающие этой отражающей функцией (и только они), содержатся в формуле (5). Каждое уравнение (5) может быть моделью нашего явления, а, точнее, многих однотипных явлений. Функция $R(t,x)$ призвана более точно отразить специфику изучаемого явления. Успех в выборе вида функций $F(t,x)$ и $R(t,x)$ будет, разумеется, зависеть от нашего опыта и интуиции.

На практике рассматриваемые явления могут определяться не одним, а несколькими параметрами. В этом случае под x будем понимать вектор, а под $F(t,x)$ - вектор-функцию.

Таким образом, в процессе построения дифференциальной модели изучаемого явления следует выделить следующие этапы:

1. Отбор данных.

2. Поиск (подбор) отражающей функции на основе имеющихся данных.

3. Построение класса дифференциальных уравнений (систем), соответствующих полученной отражающей функции.

4. Выбор из построенного класса такого дифференциального уравнения, которое наиболее соответствует сути изучаемого явления.

5. Анализ построенной модели на предмет ее адекватности. Здесь мы должны ответить на вопрос: «Может ли служить построенное дифференциальное уравнение математической моделью исследуемого процесса?»

Построение модели в простой ситуации на основе реальных данных. Для построения модели автор использовал данные о гибели людей на территории Республики Беларусь в результате пожаров за длительный период времени, которые представлены в виде таблицы по годам (табл. 2).

Таблица 2 - Исходные данные о гибели людей

1946		1947		1948		1949		1950		1951		1952	
65	-14	48	-13	41	-12	38	-11	63	-10	43	-9	64	-8
1953		1954		1955		1956		1957		1958		1959	
56	-7	33	-6	46	-5	54	-4	105	-3	35	-2	82	-1
1960		1961		1962		1963		1964		1965		1966	
43	0	68	+1	66	+2	66	+3	80	+4	101	+5	91	+6
1967		1968		1969		1970		1971		1972		1973	
92	+7	91	+8	98	+9	134	+10	147	+11	167	+12	174	+13
1974		1975		1976		1977		1978		1979		1980	
136	+14	190		233		219		201		187		247	
1981		1982		1983		1984		1985		---		---	
229		202		301		385		452					
---		---		---		---		2002		2003		2004	
								1272		1262		1209	

Каждая ячейка в этой таблице разделена на три части: в верхней половине записан год, в нижней слева – число погибших в этом году, справа – номер интервала (данные за 1986-2001 гг. отсутствуют).

Итак, у нас имеется временной промежуток, который разбит на интервалы (годы), и информация о каждом интервале имеется. Т. е. первое требование (не единственное) к структуре данных удовлетворено.

Отражающую функцию будем искать в виде (2).

Выберем промежуток времени с 1946 по 1974 гг. (всего 29 лет). Разделим его на интервалы. Договоримся, что длина каждого интервала – один год. Тогда 1946 год будет -14 интервалом, 1947, соответственно, -13 и т.д. до 1974 года, который станет 14 интервалом. При таком разбиении 1960 год мы принимаем за нулевой интервал - середину (таб.1).

Для определения a составим систему (3), каждое уравнение которой удобно записать в виде

$$a \cdot i = \ln \frac{x(-i)}{x(i)},$$

где i - номер уравнения. Вычислим значения функции

$$f(i) = \ln \frac{x(-i)}{x(i)}$$

в каждой точке, изменяя i от -14 до 14. Через полученные точки проводим прямую по методу наименьших квадратов, угловой коэффициент которой $a = -0{,}09$ и есть искомый параметр. Таким образом, отражающая функция построена:

$$F(t,x) = e^{-0{,}09t} x. \tag{6}$$

Сдвинем теперь нулевой интервал с 1960 в 1975 год и оценим, каковы могли бы быть наши данные в более поздний период с учетом найденной отражающей функции. Нам предстоит обратный процесс: пользуясь (6) и формулами (3), пересчитать все данные, начиная с 1976 года, который станет 1-м интервалом. Т.е. пересчет будем проводить по формуле:

$$x(i) = e^{0{,}09i} x(-i).$$

(Данные до нулевого интервала полагаем известными).

Результаты этих расчетов отражены на рисунке.

Мы видим, что если наш пересчет за 1976 – 1982 гг. в первом приближении согласуется с действительностью, то за 2002-2004 гг. расчетные данные существенно меньше реальных. Однако это касается абсолютной величины показателей. Что касается характера изменений, то здесь подобия больше.

Оставим, однако, отражающую функцию без изменений и перейдем к следующему этапу работы над моделью – построению дифференциального уравнения. Подставляя $F(t,x)$ в формулу (5), получим

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}(-0{,}09)e^{-0{,}09t} x e^{-0{,}09t} + e^{-0{,}09t} R(t,x) - R(-t,F)$$

или

$$\dot{x} = 0{,}045\, x + e^{0{,}09\, t} R(t, x) - R(-t, e^{-0{,}09\, t} x). \tag{7}$$

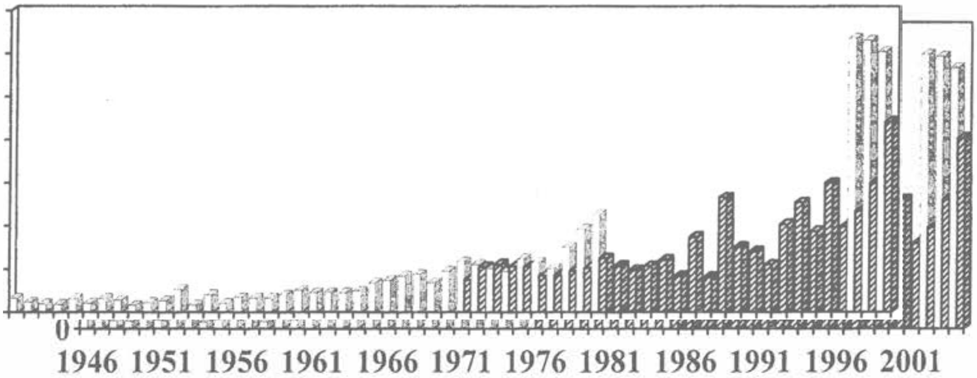

Рисунок - Сравнение исходной статистики и расчетных данных

Выводы. Как уже отмечалось, в формуле (7) содержатся все дифференциальные уравнения, обладающие отражающей функцией (6), и которые могут служить моделью ряда однотипных явлений. Правильный выбор функции $R(t,x)$ позволит сузить класс (7) до одного дифференциального уравнения, соответствующего изучаемому процессу. Вопросы соответствия функций $R(t,x)$ и $F(t,x)$ типу чрезвычайного явления (или географическому региону и т. д. – возможны и другие виды соответствия) требуют глубокого изучения. Поэтому здесь мы остановимся на модели (7), отложив нерешенные задачи на перспективу.

В заключение следует сказать несколько слов об используемых данных и об их структуре. Мы уже упомянули о важности того, чтобы рассматриваемый промежуток времени был характерным для данного явления. На первый взгляд может показаться, что используемая в данной работе статистика не в полной мере удовлетворяет этому требованию. Однако, не исключено, что рассматриваемый период в несколько десятилетий тоже является некоторым характерным периодом, частью периода, или содержит в себе несколько временных циклов. Ответ на соответствующий вопрос требует дополнительного анализа.

Литература

1. Акимов В. А., Лесных В. В., Радаев Н. Н. Риски в природе, техносфере, обществе и экономике // МЧС России. – М.: Деловой экспресс, 2004. – 352 с.

2. Арнольд В. И. Теория катастроф. – М.: Знание, 1981. – 64 с.

3. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем // Мин. образования РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины», – Гомель, 2004. – 196 с.

Поступила в редакцию 26.01.07.

Belsky V. A.
MODELING OF EMERGENCY SITUATIONS BY MEANS OF THE REFLECTIVE FUNCTION.

About the possibility of using of the reflective function for building of differential model of Emergency.