УДК 539.4

ИМПУЛЬСНЫЕ НАГРУЖЕНИЯ ТРЁХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Д. В. ЛЕОНЕНКО, кандидат физико-математических наук

Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь, г. Гомель, Беларусь

Рассмотрены колебания трёхслойного стержня под действием импульсных сосредоточенных сил. Для описания кинематики несущих слоев приняты гипотезы Бернулли. В жёстком сжимаемом заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. Получены аналитические решения задач, проведен их численный и сравнительный анализ.

Ключевые слова: импульсные нагрузки, трёхслойный стержень, собственные и вынужденные колебания.

Введение. В настоящее время деформирование упругих трехслойных элементов конструкций при статических нагрузках достаточно хорошо изучено, однако, их поведение при динамических воздействиях в условиях мгновенного приложения нагрузок исследовано мало. Подобные проблемы безопасности конструкций возникают в условиях природных катаклизмов, при сейсмических воздействиях, вследствие ударных взрывных волн.

Колебания трехслойных элементов конструкций исследованы в работах [1–3]. Динамические взрывные воздействия на тонкостенные конструкции исследованы в работе [4]. Здесь рассматриваются малые поперечные колебания несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем под действием импульсных сосредоточенных сил.

Постановка задачи. Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). Распределенная поверхностная нагрузка $q(x,t)$ приложена к внешней плоскости первого слоя. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k – толщина k-го слоя, $h_3 = 2c$ (k = 1, 2, 3 – номер слоя); b – ширина стержня. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине l.

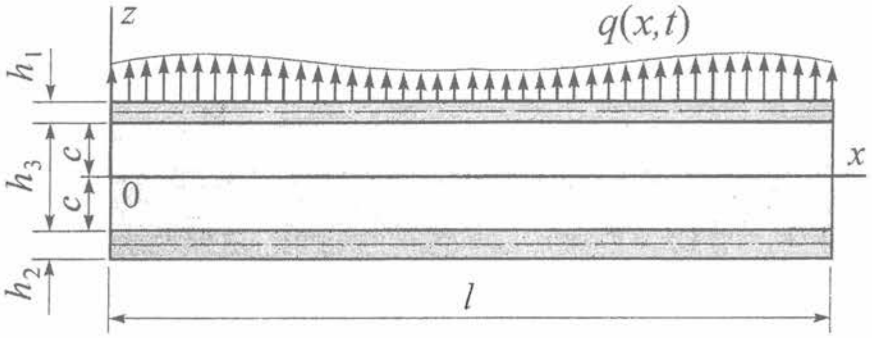

Рисунок 1 - Расчётная схема трёхслойного стержня

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ выражаются через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$ следующими соотношениями: в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,x}; \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \le z \le c + h_1);$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,x}; \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \le z \le -c);$$

в заполнителе

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right);$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right)w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right)w_2 \quad (-c \le z \le c), \tag{1}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения движения следуют из принципа Лагранжа с учетом работы сил инерции

$$\delta A - \delta W = \delta A_I, \tag{3}$$

где δA – вариация работы внешних сил

$$\delta A = b\int_0^l \left[p\left(\delta u_1 - \frac{h_1}{2}\delta w_{1,x}\right) + q\delta w_1 \right] dx;$$

δW – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = b\int_0^l \left[\sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta\varepsilon_{xx}^{(k)} dz + 2\int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta\varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} \delta\varepsilon_{zz}^{(3)} dz \right] dx;$$

δA_I – вариация работы сил инерции

$$\delta A_j = b\sum_{k=1}^{3}\int_0^l\int_{h_k}\left[\rho_k\left(\ddot{w}^{(k)}\delta w^{(k)} + \ddot{u}^{(k)}\delta u^{(k)}\right)\right]dzdx\ ;$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций в k-м слое.

После взятия интегралов и выполнения требования тождественного удовлетворения уравнения (2) при произвольных значениях варьируемых величин приходим к системе уравнений движения в перемещениях рассматриваемого трехслойного стержня. Оставляя в них только те члены, которые учитывают инерцию движения в слоях вдоль координатных осей и инерцию вращения нормали в несущих слоях, получим следующую систему уравнений в частных производных ($p = 0$):

$$a_1u_1 - a_1u_2 - a_4u_{1,xx} - a_5u_{2,xx} + a_2w_{1,x} + a_3w_{2,x} - 2a_6w_{1,xxx} + a_7w_{2,xxx} + m_1\ddot{u}_1 = 0\ ;$$

$$-a_1u_1 + a_1u_2 - a_5u_{1,xx} - a_9u_{2,xx} - a_3w_{1,x} - a_2w_{2,x} - a_6w_{1,xxx} + 2a_7w_{2,xxx} + m_2\ddot{u}_2 = 0\ ;$$

$$a_{10}u_{1,x} - a_{17}u_{2,x} + 2a_6u_{1,xxx} + a_6u_{2,xxx} + a_{11}w_{1,xx} - a_{12}w_{2,xx} +$$

$$+ a_{15}w_{1,xxxx} - a_{16}w_{2,xxxx} + a_8w_1 - a_8w_2 + m_1\ddot{w}_1 - m_3\ddot{w}_{1,xx} = q\ ;$$

$$-a_{18}u_{1,x} + a_{19}u_{2,x} - a_7u_{1,xxx} - 2a_7u_{2,xxx} - a_{12}w_{1,xx} + a_{14}w_{2,xx} -$$

$$-a_{16}w_{1,xxxx} + a_{13}w_{2,xxxx} - a_8w_1 + a_8w_2 + m_2\ddot{w}_2 - m_4\ddot{w}_{2,xx} = 0\ , \tag{3}$$

где a_i – коэффициенты зависящие от геометрии и материалов слоёв, m_i – инерционные члены.

Принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия в сечениях $x = 0$; l (l – длина стержня) в перемещениях имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{4}$$

Начальные условия движения будут следующие ($t = 0$):

$$u_k(x, 0) = u_{k0}(x);\quad \dot{u}_k(x, 0) = \dot{u}_{k0}(x)\ ;$$

$$w_k(x, 0) = w_{k0}(x);\quad \dot{w}_k(x, 0) = \dot{w}_{k0}(x) \quad (k = 1, 2), \tag{5}$$

где $u_{k0}(x)$, $\dot{u}_{k0}(x)$, $w_{k0}(x)$, $\dot{w}_{k0}(x)$ –заданные начальные перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоев.

Решение начально-краевой задачи (3)–(5) проводится методом Бубнова – Галеркина при $p = 0$. Для этого искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ и нагрузка $q(x, t)$ представляется в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющей принятым граничным условиям (6):

$$u_1 = \sum_{m=0}^{\infty}\cos\frac{\pi mx}{l}T_{m1}(t)\ ;\quad u_2 = \sum_{m=0}^{\infty}\cos\frac{\pi mx}{l}T_{m2}(t)\ ;\quad w_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi mx}{l}T_{m3}(t)\ ;$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi mx}{l}T_{m4}(t)\ ;\quad q(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi mx}{l}q_m(t)\ , \tag{6}$$

где $q_m(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки в ряд

$$q_m(t) = \frac{2}{l}\int_0^l q(x,t)\sin\frac{\pi m x}{l}dx\,. \tag{7}$$

Подстановка выражений (6) в (3) приводит к системе уравнений для определения функций времени T_{mi} (t) (i = 1, 2, 3, 4). В матричном виде она будет следующей (индекс m опущен):

$$[B]\{T\} + [M]\{\ddot{T}\} = \{Q\}. \tag{8}$$

Здесь $[B]$ – квадратная матрица четвертого порядка, составленная из коэффициентов B_{mij}, определяемых через параметры b_i, зависящие от m; $[M]$ – диагональная матрица четвертого порядка с элементами M_{mij}; $\{T\}$ и $\{\ddot{T}\}$ – вектора, сформированные из искомых функций времени T_{mi} и их вторых производных; $\{Q\}$ – вектор, элементы которого Q_{mk} составлены из коэффициентов разложения нагрузки в ряд.

Систему (8) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{4} B_{mkj}T_{mj} + M_{mkk}\ddot{T}_{mk} = Q_{mk} \quad (k = 1, \ldots, 4). \tag{9}$$

Здесь матрица $[M]$ диагональная, поэтому от второй суммы осталось только одно k-е слагаемое. Для замыкания задачи к системе (9) необходимо добавить начальные условия (5).

Свободные колебания. Предполагается, что внешняя нагрузка отсутствует $q(x, t) = 0$. При этом условии начально-краевая задача (3) – (5) будет описывать *свободные колебания* рассматриваемого трехслойного стержня. Система уравнений (9) в этом случае примет вид (Q_{mk} = 0):

$$\sum_{j=1}^{4} B_{mkj}T_{mj} + M_{mkk}\ddot{T}_{mk} = 0 \quad (k = 1, \ldots, 4). \tag{10}$$

Решение системы (10) представляется в виде:

$$T_{mk}(t) = A_{mk}\sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \tag{11}$$

где A_{mk} – амплитуда, α_{mk} – начальная фаза и ω_k – частота колебаний.

Подстановка выражения (11) в систему (10) приводит к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[B]\{A\} = \omega^2[M]\{A\}, \tag{12}$$

где $\{A\}$ – вектор, сформированный амплитудами A_{mk}.

Обращение в (12) матрицы $[M]$, так как она не является вырожденной, осуществляет переход к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R]\{A\} = \omega^2\{A\}; \quad [R] = [M]^{-1}[B]; \quad ([R] - \omega^2 E)\{A\} = 0\,. \tag{13}$$

Система уравнений (13) однородна относительно амплитуд A_{mk}. Нулевое решение в рассматриваемом случае означает отсутствие колебаний. Для нахождения нетривиального решения необходимо потребовать равенство нулю определителя системы. Это приводит к получению алгебраического уравнения 4-го порядка относительно ω_k^2. Решив его, получим четыре вещественных неотрицательных корня. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра m оказывается четырёхчастотным. Поэтому вместо решения (11) нужно принять:

$$T_{mk}(t)=\sum_{i=1}^{4}A_{mki}\sin(\omega_{mi}t+\alpha_{mi})\,. \tag{14}$$

Численное исследование частот свободных колебаний проводилось для трехслойного стержня, набранного из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т [4]. В таблице 1 приведены значения всех четырех частот ω_{mi} для каждого параметра $m = 0, \ldots, 3$ при толщине слоев $h_1 = 0{,}01$, $h_2 = 0{,}05$; $h_3 = 0{,}18$.

Таблица 1 – Значения частот

m	ω_{m1}	ω_{m2}	ω_{m3}	ω_{m4}
0	0	4516	0	16525
1	845	9166	14564	17605
2	2606	13455	20896	30471
3	5420	13786	29489	45402

Здесь следует отметить отсутствие устойчивого роста первых двух минимальных частот с увеличением параметра m. В то же время для ω_{m3} и ω_{m4} это явление имеет место.

Вынужденные колебания. Для их рассмотрения необходимо предварительно образовать вспомогательные зависимости. Функции (14) $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk}=\sum_{i=1}^{4}\delta_{mki}\zeta_{mi}\qquad\left(\sum_{i=1}^{4}\delta_{mik}^{2}=1\right), \tag{15}$$

где δ_{mki} – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции $\zeta_{mi}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\ddot{\zeta}_{mi}+\omega_{mi}^{2}\zeta_{mi}=\tilde{q}_{mi}(t), \tag{16}$$

где $\tilde{q}_{mi}$ – компоненты приведенной силовой нагрузки.

Для пояснения указанной процедуры нужно подставить выражение (14), в котором коэффициенты A_{ki} заменены нормированными амплитудами δ_{ki}, в уравнение (10). В результате

$$\sum_{j=1}^{4}B_{mkj}\delta_{mij}=\omega_{mi}^{2}M_{mkk}\delta_{mik}\,. \tag{17}$$

Далее выражение (15) подставляется в (9) и проводится замена (17). После этого умножение k-го уравнения на δ_{mki} (i = 1, 2, 3, 4), суммирование по k и использование свойства ортогональности собственных форм

$$M_{m11}\delta_{m1t}\delta_{m1p}+M_{m22}\delta_{m2t}\delta_{m2p}+M_{m33}\delta_{m3t}\delta_{m3p}+M_{m44}\delta_{m4t}\delta_{m4p}=0\,,$$

если $t\neq p$, позволяет получить четыре уравнения (16), содержащие лишь одну неизвестную функцию $\zeta_{mi}(t)$ и ее вторую производную.

Общее решение дифференциального уравнения (16) можно принять в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi}\cos(\omega_{mi}t) + B_{mi}\sin(\omega_{mi}t) + \frac{1}{\omega_{mi}}\int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau))\tilde{q}_{mi}(\tau)d\tau. \qquad (18)$$

После взятия интеграла в (18) искомые перемещения представляются в виде сумм произведений $\zeta_{mi}(t)$ на соответствующие коэффициенты δ_{mki} и исходные координатные функции, указанные в (6).

В качестве примера рассматриваются колебания трехслойного стержня под действием сосредоточенных импульсных сил, приложенных к внешней плоскости первого слоя. Начальные условия предполагаются нулевыми, поэтому $A_{mi} = B_{mi} = 0$. При численном счете принимаются: интенсивности импульсной силы – $Q_и = 2\cdot10^4$ Н ·с/м; относительные толщины слоев – $h_1 = 0{,}01$, $h_2 = 0{,}05$, $c = 0{,}09$; момент времени $t_0 = 0{,}017$ с, при котором прогибы максимальны. Перемещения на рисунках указаны в процентах по отношению к длине стержня.

На трехслойный стержень в сечении $x = a$ воздействует мгновенный импульс поперечной силы $Q_и = \text{const}$. Соответствующую нагрузку можно записать в следующем аналитическом виде:

$$q_и(x, t) = Q_и\delta(t)\delta(a). \qquad (19)$$

Используя (7), получим функцию, соответствующую нагрузке (19)

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{2Q_и\delta_{m3i}\sin(\omega_{mi}t)}{\omega_{mi}l\sum_{k=1}^{4}M_{mkk}\delta_{mki}^2}\sin\frac{\pi m a}{l}. \qquad (20)$$

На рис. 2 показано изменение перемещений w_1 (*а*) и u_1 (б) вдоль оси стержня в зависимости от места приложения импульса силы $Q_и$, вычисленные с использованием функции (20) в момент t_0: *1* – $a = 0{,}25$; *2* – $a = 0{,}5$; *3* – $a = 0{,}75$. Перемещения максимальны, если импульс действует посередине стержня. Если же он приложен на концах, то поперечные колебания не возникают.

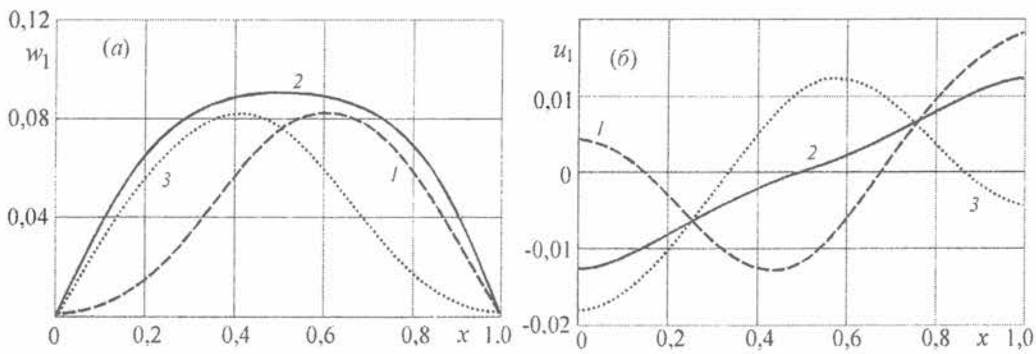

Рисунок 2 - Изменения прогиба (*а*) и горизонтального перемещения (*б*) вдоль оси стержня

График изменения соответствующей деформации ε_{zz} вдоль оси стержня (a = 0,5) показан на рис. 3. Максимум относительного обжатия (11 %) достигается в сечениях ($x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}8$). В середине стержня обжатие минимально.

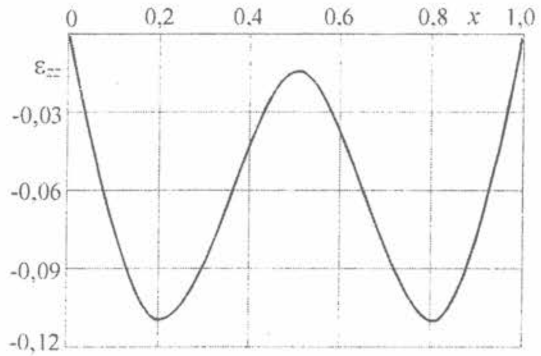

Рисунок 3 - Поперечная деформация в заполнителе

Вывод. Таким образом, в работе исследованы свободные и вынужденные колебания трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем. Рассмотрен случай воздействия импульсных сосредоточенных сил.

Обозначения

ρ_k – плотность материала k-го слоя (k = 1, 2, 3); $q(r, t)$ – внешняя распределенная нагрузка; $Q(r, t)$ – внешняя сосредоточенная нагрузка; $q_n(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки в ряд по собственным функциям; $Q_и$ – интенсивность импульсной сосредоточенной силы; w_1, w_2– прогибы несущих слоев стержня; u_1, u_2– горизонтальное перемещение срединной поверхности несущих слоев; G_k, K_k – модули сдвига и объемной деформации; l – длина стержня; δA – вариация работы внешних сил; δW – вариация работы внутренних сил упругости; δA_I – вариация работы сил инерции; $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций в k-м слое; $T_{mk}(t)$ – функция времени; ω_{mi} – частоты собственных колебаний; δ_{mki} – собственные формы колебаний; a_i – коэффициенты зависящие от геометрии и материалов слоёв; m_i – инерционные члены; A_n, B_n – константы интегрирования; h_1, h_2, $h_3 = 2c$ – толщины слоев; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Литература

1. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций.– Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.

2. Горшков А. Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д. В. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

3. Леоненко Д. В. Свободные колебания упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2003. – № 3 (18). – С. 28–31.

4. Луговой П. З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 5.

Поступила в редакцию 26.09.06.

Leonenko D. V.
IMPACT LOADING SANDWICH BEAM.

Considered fluctuations sandwich beam under the action of impact points power. For the kinematics description of carryings layers accepted the hypotheses Bernoulli. In hard compressed filler the precise ratio of a theory of elastic strength with linear approximating of movements of his its points from cross-sectional coordinate *z* are fair. Received the analytical deciding and conducted their numeric and comparative analysis.