DOI: https://doi.org/10.33408/2519-237X.2021.5-4.458

УДК 519.248:614.8

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА ВЫЗОВА В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Сережкин В.Н.

Цель. Получить оценку вероятности отказа от обслуживания вызова для нестационарного режима функционирования системы массового обслуживания с отказами.

Методы. Операционный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений.

Результаты. Выражения для оценки вероятности отказа, зависящей от интенсивности потока вызовов λ и интенсивности обслуживания μ.

Область применения исследований. Моделирование оперативно-тактической деятельности органов и подразделений по чрезвычайным ситуациям.

Ключевые слова: математическое моделирование, вероятность отказа, система массового обслуживания, определитель матрицы.

(Поступила в редакцию 6 мая 2021 г.)

Введение

При математическом моделировании оперативно-тактической деятельности органов и подразделений по чрезвычайным ситуациям используют методы теории массового обслуживания, поскольку пожарная аварийно-спасательная часть представляет собой систему массового обслуживания (СМО), где каналами обслуживания являются отделения на основных или специальных автомобилях. Пусть λ – интенсивность потока вызовов оперативных отделений, который предполагается пуассоновским потоком. Это означает, что вероятность поступления k вызовов за время t определяется по формуле Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \qquad (1)$$

Пусть $t_{обс.}$ – среднее время обслуживания вызова, $\mu = 1/t_{обс.}$ – интенсивность обслуживания, $\alpha = \lambda\mu^{-1}$ – приведенная интенсивность потока (коэффициент загрузки СМО). Предполагается, что время обслуживания вызова имеет показательное распределение с параметром μ. Как отмечается в работе [1], функционирование отделений на специальных автомобилях, например автолестницах, можно моделировать на основе n-канальной системы массового обслуживания с отказами. Обозначим через E_i, $i = \overline{0,n}$, – все возможные состояния СМО в момент времени t. То есть в состоянии E_0 нет вызовов на обслуживание, а в состоянии E_i, $i > 0$, обслуживанием вызовов занято i отделений (каналов).

Размеченный граф состояний такой СМО имеет вид, показанный на рисунке 1.

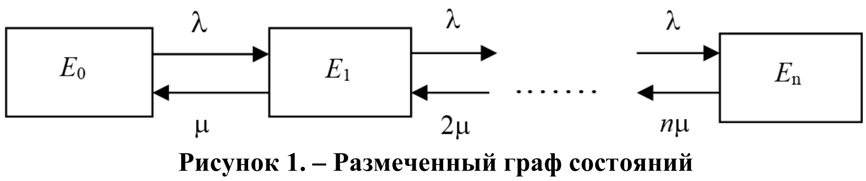

Рисунок 1. – Размеченный граф состояний

Для определения характеристик СМО необходимо определить вероятности $p_i(t)$, $i = \overline{0,n}$, ее нахождения в состоянии E_i. Очевидно, что $p_0(t) + p_1(t) + \ldots + p_n(t) = 1$. В начальный момент времени

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = p_2(0) = \ldots = p_n(0) = 0. \qquad (2)$$

Вероятность отказа в обслуживании вызова $p_{\text{отк.}} = p_n(t) \overset{\text{обозн.}}{=} q(t)$ равна вероятности того, что в момент времени t будут заняты все n каналов (все отделения заняты обслуживанием вызовов).

Основная часть

Для установившегося режима функционирования СМО существуют предельные вероятности ее нахождения в состоянии E_i, $i = \overline{0,n}$,

$$\overline{p}_i = \lim_{t\to\infty} p_i(t),$$

которые определяются по формулам Эрланга

$$\overline{p}_i = \frac{\alpha^i}{i!}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!}\right)^{-1}. \tag{3}$$

В частности, в предельном случае

$$\overline{q} = \overline{p}_n = \frac{\alpha^n}{n!}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!}\right)^{-1}. \tag{4}$$

В общем случае функции $p_i(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Эрланга – Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dfrac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \quad k = \overline{1, n-1}, \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -n\mu p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t). \end{cases} \tag{5}$$

При $n = 1$ система (5) с начальными условиями (2) имеет точное решение, для которого

$$q(t) = p_1(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right). \tag{6}$$

Аналитическое решение системы (5) в общем случае приводит к необходимости решения алгебраических уравнений n-й степени, что затрудняет нахождение вероятностей $p_i(t)$. В данной работе получена оценка для вероятности отказа $q(t)$. В основе вывода лежит операционный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений. Все используемые далее определения и формулы можно найти в работе [3].

Заменим функции $p_i(t)$, $i = \overline{0,n}$, их изображениями, полученными преобразованием Лапласа

$$X_i = X_i(p) = \int_0^\infty e^{-pt} p_i(t)\,dt, \qquad 0 < p \in \mathbb{C}.$$

После замены оригиналов $p_i(t)$ на их изображения X_i система (5) примет вид:

$$\begin{cases} pX_0 - 1 = -\lambda X_0 + \mu X_1, \\ pX_k = -(\lambda + k\mu)X_k + \lambda X_{k-1} + (k+1)\mu X_{k+1}, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ pX_n = -n\mu X_n + \lambda X_{n-1}. \end{cases} \tag{7}$$

Разделив все уравнения системы (7) на μ и положив $y = p\mu^{-1}$, представим ее в матричном виде:

$$AX = M, \tag{8}$$

где $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)^T$, $M = (\mu^{-1}, 0, \dots, 0)^T$, A – квадратная матрица порядка $n + 1$, имеющая вид:

$$A = \begin{pmatrix} y+\alpha & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & y+\alpha+1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & y+\alpha+2 & -3 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & y+\alpha+n-1 & -n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha & y+n \end{pmatrix}.$$

Если определитель $\det A \neq 0$, то матричное уравнение (8) имеет единственное решение:

$$X = A^{-1}M = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,n+1} \\ A_{21} & \dots & A_{2,n+1} \\ \hdotsfor{3} \\ A_{n+1,1} & \dots & A_{n+1,n+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu^{-1}}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \dots \\ A_{1,n+1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента i-й строки и j-го столбца матрицы A.

Вычислим значение $\det A$. Для этого обозначим через $A_k = A_k(y)$ главную подматрицу матрицы A, расположенную в строках и столбцах с номерами k, $k + 1$, …, $n + 1$, $k = \overline{1, n+1}$. В частности, $A_1 = A$, $A_{n+1} = (y + n)$. Порядок матрицы A_k равен $n - k + 2$.

Введем в рассмотрение матрицы U_n порядка n и Y порядка $n + 1$:

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y & y & y & y & \dots & y \\ -\alpha & y+1 & y & y & \dots & y \\ 0 & -\alpha & y+2 & y & \dots & y \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha & y+n \end{pmatrix}.$$

Из этих определений следует, что $U_{n+1}A = Y$. Определим теперь алгебраические дополнения $A_{1k} = A_{1k}(y)$ элементов первой строки матрицы A. Очевидно, что $A_{11} = \det A_2$, $A_{1,n+1} = (-1)^{n+2}(-\alpha)^n = \alpha^n$. При $k = \overline{2, n}$ будем иметь:

$$A_{1k} = (-1)^{1+k} \det\left(\begin{array}{cccc|c} -\alpha & * & \dots & * & \\ 0 & -\alpha & \dots & * & * \\ \hdotsfor{4} & \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & \\ \hline & & 0 & & A_{k+1} \end{array}\right) = \alpha^{k-1} \det A_{k+1}.$$

Определитель матрицы A:

$$\det A = \det(U_{n+1}A) = \det Y = y\Delta_{n+1}, \qquad n \ge 0, \tag{10}$$

где

$$\Delta_{n+1} = \Delta_{n+1}(\text{y}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha & y+1 & y & y & \dots & y \\ 0 & -\alpha & y+2 & y & \dots & y \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha & y+n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = y + 1 + \alpha$. Разлагая последовательно определитель Δ_{n+1} по элементам последней строки, для $n \ge 2$ получим рекуррентную формулу:

$$\Delta_{n+1} = (y+n)\Delta_n + \alpha\Big(y\Delta_{n-1} + \alpha\Big(y\Delta_{n-2} + \ldots + \alpha\big(y\Delta_1 + \alpha\big)\Big)\Big),$$

$$\Delta_{n+1} = (y+n)\Delta_n + \alpha^n + y\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i\Delta_{n-i}. \tag{11}$$

Обозначим через $B_r(t)$, $r = 0, 1, 2, \dots$ следующий многочлен степени $r + 1$:

$$B_r(t) = \alpha^{r+1} + \sum_{i=0}^{r} C_{r+1}^i t(t+1)\dots(t+r-i)\alpha^i, \quad \alpha > 0, \tag{12}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Очевидно, что $B_0(t) = t + \alpha$, $B_1(t) = t(t + 1) + 2\alpha t + \alpha^2$. Положим $B_{-1}(t) = 1$. Многочлены $B_r(t)$ были введены в работе [2, с. 91]. В этой работе доказано, что $B_r(t)$ имеет $r + 1$ простых отрицательных корней (следовательно, $B_r(t) > 0$ при $t \ge 0$) и выполняется соотношение

$$B_r\left(t\right) = tB_{r-1}\left(t+1\right) + \alpha B_{r-1}\left(t\right), \qquad r = 0, 1, \dots \tag{13}$$

Лемма 1. Многочлены $B_r(t)$ связаны соотношением

$$tB_r(t+1) = (r+1+t)B_r(t) - \alpha(r+1)B_{r-1}(t). \tag{14}$$

Для доказательства достаточно сравнить коэффициенты при степенях α^i в левой и правой частях соотношения (14). В правой части этот коэффициент равен

$$\begin{aligned} &(r+1+t)C_{r+1}^i t(t+1)\dots(t+r-i) - (r+1)C_r^{i-1} t(t+1)\dots(t+r-i) = \\ &= (r+1+t)C_{r+1}^i t(t+1)\dots(t+r-i) - iC_{r+1}^i t(t+1)(t+2)\dots(t+r-i) = \\ &= C_{r+1}^i t(t+1)(t+2)\dots(t+r-i)(t+r+1-i), \end{aligned}$$

что совпадает с коэффициентом при α^i в левой части.

Лемма 2. При $r \ge 1$ многочлены $B_r(t)$ связаны рекуррентной формулой

$$B_r(t) = (r+t)B_{r-1}(t) + \alpha^{r+1} + (t-1)\sum_{i=1}^{r}\alpha^i B_{r-1-i}(t). \tag{15}$$

Доказательство проводится индукцией по r с использованием формул (13) и (14). При $r = 1$ утверждение леммы легко проверяется. Пусть $r > 1$. Рассмотрим разность

$$B_r(t)-(r+t)B_{r-1}(t)-\alpha^{r+1}-(t-1)\sum_{i=1}^{r}\alpha^i B_{r-1-i}(t)=$$

$$\overset{(13)}{=} tB_{r-1}(t+1)+\alpha B_{r-1}(t)-(r+t)B_{r-1}(t)-\alpha^{r+1}-(t-1)\sum_{i=1}^{r}\alpha^i B_{r-1-i}(t)=$$

$$\overset{(14)\text{ для } r-1}{=} (r+t)B_{r-1}(t)-\alpha rB_{r-2}(t)+\alpha B_{r-1}(t)-(r+t)B_{r-1}(t)-\alpha^{r+1}-(t-1)\sum_{i=1}^{r}\alpha^i B_{r-1-i}(t)=$$

$$\overset{(15)\text{ для } r-1}{=} -\alpha rB_{r-2}(t)+\alpha[(r-1+t)B_{r-2}(t)+\alpha^r+(t-1)\sum_{i=1}^{r-1}\alpha^i B_{r-2-i}(t)]-\alpha^{r+1}-(t-1)\sum_{i=1}^{r}\alpha^i B_{r-1-i}(t)=$$

$$=(t-1)[\alpha B_{r-2}(t)+\sum_{i=1}^{r-1}\alpha^{i+1}B_{r-2-i}(t)-\sum_{i=1}^{r}\alpha^i B_{r-1-i}(t)]\equiv 0.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 3. Для всех $n \geq 0$ справедливо равенство

$$\Delta_{n+1}=B_{n-1}(y+1). \tag{16}$$

Действительно, при $n = 0$ или $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Применяя индуктивное предположение, формулу (11) и лемму 2, находим

$$\Delta_{n+1}\overset{(11)}{=}(n+y)\Delta_n+\alpha^n+y\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i\Delta_{n-i}=$$

$$\overset{(16)\text{ для } n}{=}(n+y)B_{n-2}(y+1)+\alpha^n+y\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i B_{n-2-i}(y+1)=\left[y+1=t\right]=$$

$$=(n-1+t)B_{n-2}(t)+\alpha^n+(t-1)\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i B_{n-2-i}(t)\overset{(15)\text{ при } r=n-1}{=}B_{n-1}(t)=B_{n-1}(y+1).$$

Утверждение доказано.

Таким образом, в силу (10), (16) и свойства многочленов $B_r(t)$ определитель $\det A=yB_{n-1}(y+1)\neq 0$. И с учетом этого из формулы (9) получим

$$X_k(p)=\frac{A_{1,k+1}(y)}{\mu yB_{n-1}(y+1)}=\frac{A_{1,k+1}(p\mu^{-1})}{pB_{n-1}(p\mu^{-1}+1)},\quad k=\overline{0,n}. \tag{17}$$

Для определения оригиналов $p_k(t)$ нужно найти разложение в сумму простейших дробей правых частей равенств (17). Нахождение такого разложения хорошо известно. Рассмотрим случай $k = n$.

$$X_n(p)=\frac{\alpha^n}{pB_{n-1}(p\mu^{-1}+1)}.$$

Пусть $f(y)=yB_{n-1}(y+1)=(y-\lambda_0)(y-\lambda_1)\ldots(y-\lambda_n),\quad \lambda_0=0,\quad \lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$, – многочлен степени $n + 1$. Как было отмечено выше, простые корни $\lambda_i < 0$ при $i > 0$. Пусть $f_i(y)=f(y)(y-\lambda_i)^{-1}$ – многочлены степени n, $i=\overline{0,n}$.

Так как [3, с. 229]

$$\frac{\alpha^n}{\mu f(y)}=\frac{\alpha^n}{\mu}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{f_i(\lambda_i)}\cdot\frac{1}{y-\lambda_i}=\alpha^n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{f_i(\lambda_i)}\cdot\frac{1}{p-\mu\lambda_i},$$

оригинал $p_n(t)$ равен

$$p_n(t) = \alpha^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{f_i(\lambda_i)} e^{\mu\lambda_i t} \ . \tag{18}$$

Так как $y = e^x - 1$ и $y = x$ – эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to 0$, то для малых значений t справедливо соотношение

$$q(t) = p_n(t) = \alpha^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{f_i(\lambda_i) e^{-\mu\lambda_i t}} \approx \alpha^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{f_i(\lambda_i)(1-\mu\lambda_i t)} =$$

$$= \frac{\alpha^n}{\mu t} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{f_i(\lambda_i)\left(\dfrac{1}{\mu t} - \lambda_i\right)} = \frac{\alpha^n}{\mu t f\left(\dfrac{1}{\mu t}\right)} = \frac{\alpha^n}{B_{n-1}\left(\dfrac{1}{\mu t} + 1\right)} .$$

Таким образом, для достаточно малых значений t имеет место оценка вероятности отказа от обслуживания вызова, зависящая только от параметров α и μ

$$q(t) \approx \alpha^n \Big/ B_{n-1}\left(\frac{1}{\mu t} + 1\right).$$

Заключение

Полученный результат дает возможность оценить вероятность отказа от обслуживания вызова для многоканальной системы массового обслуживания с отказами для нестационарного режима функционирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брушлинский, Н.Н. Системный анализ деятельности Государственной противопожарной службы / Н.Н. Брушлинский – М.: МИПБ МВД России, 1998. – 255 с.
2. Хинчин, А.Я. Математические методы теории массового обслуживания [Электронный ресурс] / А.Я. Хинчин // Тр. МИАН СССР, 1955. – Т. 49. – С. 3–122. – Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/rus/tm/v49/p3. – Дата доступа: 10.02.2021.
3. Жевняк, Р.М. Высшая математика: в 5 ч. / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск.: Выш. школа, 1984–1988. – Ч. 4. – 1987. – 240 с.
4. Ивченко, Г.И. Теория массового обслуживания / Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. – М.: Высш. школа, 1982. – 256 с.

Оценка вероятности отказа вызова в системе массового обслуживания

Estimation of the probability of a call failure in a queuing system

Сережкин Валентин Николаевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Государственное учреждение образования «Университет гражданской защиты Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь», кафедра естественных наук, профессор

Адрес: ул. Машиностроителей, 25, 220118, г. Минск, Беларусь
Email: valserezhkin@mail.ru
ORCID: 0000-0002-2676-942X

Valentin N. Serezhkin
PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

State Educational Establishment «University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus», Chair of Natural Sciences, Professor

Address: Mashinostroiteley str., 25, 220118, Minsk, Belarus
Email: valserezhkin@mail.ru
ORCID: 0000-0002-2676-942X

DOI: https://doi.org/10.33408/2519-237X.2021.5-4.458

ESTIMATION OF THE PROBABILITY OF A CALL FAILURE IN A QUEUING SYSTEM

Serezhkin V.N.

Purpose. To obtain an estimate of the probability of failure to service a call for a non-stationary mode of operation of a queuing system with failures.

Methods. An operational method for solving systems of linear differential equations.

Findings. Expressions for estimating the probability of failure, depending on the intensity of the call flow λ and the intensity of service μ.

Application field of research. Modeling of operational and tactical activity of bodies and departments for emergency situations.

Keywords: mathematical modeling, probability of failure, queuing system, matrix determinant.

(The date of submitting: May 6, 2021)

REFERENCES

1. Brushlinskiy N.N. *Sistemnyy analiz deyatel'nosti Gosudarstvennoy protivopozharnoy sluzhby* [*System analysis of the activities of the State Fire Service*]. Moscow: Moscow Institute of Fire Safety of the Ministry of Internal Affairs of Russia, 1998. 255 p. (rus)
2. Khinchin, A.Ya. Matematicheskie metody teorii massovogo obsluzhivaniya [Mathematical methods of the queuing theory]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, 1955. Vol. 49. Pp. 3–122. (rus). Url: http://mi.mathnet.ru/rus/tm/v49/p3.
3. Zhevnyak R.M., Karpuk A.A. *Vysshaya matematika* [*Higher mathematics*]: in 2 parts. Minsk: Vysheyshaya shkola, 1984–1988. Part 4. 1987. 240 p.
4. Ivchenko G.I., Kashtanov V.A., Kovalenko I.N. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [*Queuing theory*]. Moscow: Vysshaya shkola, 1982. 256 p.