

## РАСТЕКАНИЕ КАПЛИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ТВЕРДОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Байков В.И., Нахай Д.М., Миканович Д.С.

*Цель.* Исследовать кинетику растекания капли неньютоновской вязкой жидкости по горизонтальной поверхности.

*Методы.* Математическое моделирование.

*Результаты.* Получено кинетическое уравнение, описывающее процесс растекания капли неньютоновской вязкой жидкости по твердой горизонтальной поверхности.

*Область применения исследований.* Полученные результаты важны для дальнейшего исследования движения неньютоновских вязких жидкостей по твердой поверхности.

*Ключевые слова:* динамический мениск, краевой угол, равновесный краевой угол.

(Поступила в редакцию 28 марта 2024 г.)

### Введение

Вода является широко применяемым огнетушащим средством тушения пожаров веществ в различных агрегатных состояниях. Для повышения огнетушащих свойств воды в нее вводят поверхностно-активные вещества, применяют различного рода загустители, увеличивающие вязкость воды и одновременно повышающие адгезию, т.е. способность воды задерживаться на поверхности твердого горящего тела. Добавление в воду незначительного количества высокомолекулярных полимеров позволяет существенно сократить сопротивление транспортирующих такую воду трубопроводов.

Эти добавки изменяют реологическое поведение воды, превращая ее в неньютоновскую жидкость, хорошо описываемую степенным реологическим уравнением [1]:

$$\tau = k \left| \frac{dv}{dz} \right|^{n-1} \frac{dv}{dz}, \quad (1)$$

где  $\tau$  – напряжение сдвига, Па;

$k$  – коэффициент консистенции жидкости, Па·с <sup>$n$</sup> ;

$n$  – показатель неньютоновского поведения ( $n \leq 1$ );

$dv/dz$  – скорость сдвига, м/с.

Для подачи воды при тушении пожара используют пожарные стволы или оросители, которыми можно создавать сплошные, капельные, распыленные и мелкораспыленные водяные струи, т.е. потоки воды, состоящие из мелких капель. При горении твердых материалов основную роль в пожаротушении играет охлаждение поверхности. Поэтому чрезвычайно важно знать поведение капель на твердых поверхностях, окружающих очаг горения, поскольку, попадая на твердую поверхность, капля растекается по ней и испаряется, тем самым создавая охлаждающий эффект.

Отметим, что в работах [2–4] установлено существование пристенного эффекта скольжения при фильтрации растворов полимеров через грунты ограждающих сооружений шламохранилищ [2] и при пропитке полимерными растворами пористых материалов [3; 4]. Явление пристенного скольжения следует иметь в виду и при экспериментальном изучении растекания неньютоновских капель по твердым поверхностям.

### Основная часть

Дадим описание процесса растекания капли неньютоновской жидкости по твердой горизонтальной поверхности, взяв за основу идею, изложенную в работе [5].

Результаты экспериментов [6; 7] показывают, что капля жидкости при растекании имеет форму, схематически изображенную на рисунке 1. Большая (центральная) часть капли сохраняет форму, близкую к шаровому сегменту, и ограничена выпуклой поверхностью с краевым углом  $\theta$ . На периферии капли образуется зона динамического мениска, имеющая вогнутую поверхность с краевым углом, близким к равновесному  $\theta_c$ . Такой вид внешней поверхности капли свидетельствует о равномерном распределении давления в основной (центральной) части и его перераспределении в зоне динамического мениска относительно твердой поверхности, т.е. центральную часть капли считаем неподвижной по сравнению с перемещением динамического мениска. Давление жидкости  $p$  (м) на входе в динамический мениск полагаем равным давлению в центральной части капли:

$$p = \frac{2\sigma}{r_1} \sin \theta, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение, Н/м;

$r_1$  – внутренний радиус капли, м;

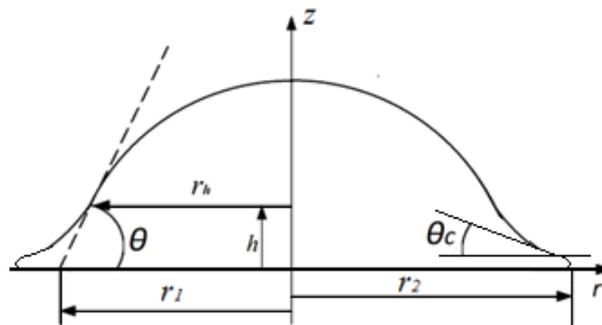
$\theta$  – краевой угол, рад;

$p$  – давление в капле, Па.

Давление вблизи внешней границы динамического мениска и твердой поверхности считаем близким к равновесному значению:

$$p_c = \frac{2\sigma}{r_2} \sin \theta_c,$$

где  $r_2$  – внешний радиус капли, м.



$r_1$  и  $r_2$  – внутренний и внешний радиусы капли;  $\theta$  – краевой угол;  $\theta_c$  – равновесный краевой угол;  
 $h$  – высота динамического мениска,  $z$  и  $r$  – продольная и радиальная координаты;  
 $r_h$  – радиальная координата поверхности динамического мениска.

**Рисунок 1. – Схема растекания капли**

Пусть  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны в данной точке поверхности динамического мениска. Считаем радиус кривизны поверхности положительным, если он направлен внутрь капли, и отрицательным, если наружу от капли. Тогда поверхностное давление в зоне динамического мениска:

$$p - p_0 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (3)$$

где  $p_0$  – давление воздуха.

Введем цилиндрическую систему координат, в которой ось  $z$  перпендикулярна твердой поверхности и совпадает с осью симметрии капли, а ось  $r$  – радиальная координата капли. В результате главные радиусы кривизны поверхности в зоне динамического мениска примут в вид:

$$R_1 = r_h \left[ 1 + \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad R_2 = - \left[ 1 + \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} / \frac{d^2h}{dr^2}. \quad (4)$$

Будем полагать, что для растекающейся по твердой поверхности капли справедливо  $R_1 \gg R_2$ . В уравнениях движения зоны динамического мениска пренебрегаем локальной производной скорости по времени по сравнению с вязкостным слагаемым и игнорируем инерционные эффекты. Тогда уравнения неразрывности и движения «степенной» жидкости для области мениска примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial r} + k \frac{\partial}{\partial z} \left( \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad (6)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;

$g$  – ускорение свободного падения;

$u = u(z, r)$  и  $v = v(z, r)$  – продольная и радиальная скорости жидкости в динамическом мениске.

Дополним эти уравнения краевыми условиями. Считаем, что поверхность твердого тела непроницаема и на ней выполняется условие прилипания жидкости:

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (7)$$

На свободной поверхности динамического мениска, уравнение которой запишем в виде:

$$z = h(r),$$

должны выполняться условия двух типов: кинематическое и динамические. Так как в каждый момент времени через свободную поверхность отсутствует поток жидкости, дифференцируя последнее соотношение по времени, получим:

$$u = v \frac{dh}{dr} \quad \text{при} \quad z = h(r). \quad (8)$$

Динамические условия выражают равенство нормальных и касательных напряжений, действующих со стороны жидкости и газа:

$$p - p_0 = -\sigma \frac{d^2h}{dr^2} \left[ 1 + \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad \text{при} \quad z = h, \quad (9)$$

$$k \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h. \quad (10)$$

Представим уравнение неразрывности (5) в интегральном виде. Для этого проинтегрируем (5) по  $z$  от 0 до  $h$  и учтем первое условие (7):

$$u(z, r) \Big|_0^h + \int_0^h \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} dz = u(h, r) + \int_0^h \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} dz = 0.$$

С помощью правила Лейбница дифференцирования интеграла по параметру поменяем порядок интегрирования и дифференцирования:

$$\frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial(rv)}{\partial r} dz = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} \int_0^h rv(z,r) dz - rv(h,r) \frac{dh}{dr} \right]$$

и воспользуемся кинематическим условием (8). Тогда:

$$\frac{d}{dr} \int_0^h rv(z,r) dz = 0.$$

Введем расход жидкости:

$$Q = \int_0^h 2\pi rv(z,r) dz, \quad (11)$$

т.е. количество жидкости  $Q$ , протекающей в 1 с через поперечное сечение динамического мениска. В результате получим:

$$\frac{d}{dr} Q[h(r)] = 0. \quad (12)$$

Формула (12) означает, что  $Q$  не зависит от  $r$  и в данный момент времени расход по всей длине динамического мениска постоянен. Необходимо ясно представлять себе, что расход из-за растекания капли есть функция от времени  $Q = Q(t)$ , где  $t$  – время.

Найдем распределение скоростей  $v(z,r)$ . Проинтегрируем первое уравнение движения (6) по  $z$  от  $z$  до  $h$ :

$$p(z,r) = p(h,r) - \rho g(h-z),$$

и учтем краевое условие (9):

$$p(z,r) = p_0 - \rho g(h-z) - \sigma \frac{d^2 h}{dr^2} \left[ 1 + \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (13)$$

Уравнение (13) показывает, что производная  $\partial p(z,r) / \partial r$  от координаты  $z$  не зависит. Тогда, дважды интегрируя второе уравнение движения (6) по  $z$  с учетом краевых условий (7), (10) и того, что  $\partial v / \partial z > 0$ , получим распределение скоростей:

$$v(z,r) = \frac{n}{1+n} \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ h^{\frac{1+n}{n}} - (h-z)^{\frac{1+n}{n}} \right]. \quad (14)$$

Действительно, после первого интегрирования второго уравнения (6) по  $z$  от  $z$  до  $h$  получим:

$$\left( -\frac{\partial p}{\partial r} z + k \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Big|_h^z = 0, \quad \stackrel{(10)}{\Rightarrow} \quad -\frac{\partial p}{\partial r} (z-h) + k \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^n = -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} (h-z), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} (h-z)^{\frac{1}{n}}.$$

Проинтегрировав последнее уравнение по  $z$  от 0 до  $z$ , будем иметь:

$$v \Big|_0^z = - \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{1+n} (h-z)^{\frac{1+n}{n}} \Big|_0^z, \quad \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \quad v = \frac{n}{1+n} \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} (h-z)^{\frac{1+n}{n}} \Big|_z^0.$$

С помощью формул (11), (14) находим расход жидкости в зоне динамического мениска:

$$Q = \frac{2\pi n}{1+2n} r h^{\frac{1+2n}{n}} \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (15)$$

Отсюда для средней по толщине зоны динамического мениска скорости получаем соотношение:

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{n}{1+2n} h^{\frac{1+n}{n}} \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (16)$$

которое содержит две неизвестные величины:  $h(r)$  и  $\partial p / \partial r$ . Для их определения воспользуемся следующими соображениями. Исходя из соотношений (2) и (3), нетрудно получить:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} \approx \frac{p - p_c}{r_2 - r_1} = \frac{2\sigma}{r_1(r_2 - r_1)} \left( \sin \theta - \frac{r}{r_2} \sin \theta_c \right).$$

Учтем, что зона мениска  $(r_2 - r_1)$  намного меньше основной части капли  $r_1$ , т.е.  $r_1 / r_2 \approx 1$ . В итоге имеем:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2\sigma}{r_1(r_2 - r_1)} (\sin \theta - \sin \theta_c). \quad (17)$$

Подставив выражение (17) в формулу (16), найдем среднюю скорость динамического мениска:

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{n}{1+2n} [h(r)]^{\frac{1+n}{n}} \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{2\sigma}{r_1(r_2 - r_1)} (\sin \theta - \sin \theta_c) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (18)$$

Найдем высоту капли  $h_1 = h(r_1)$  на входе в зону динамического мениска. На свободной поверхности динамического мениска касательное напряжение трения равно нулю (см. (10)). Поэтому его форма определяется поверхностным натяжением  $\sigma$  и действующей на единицу объема силой тяжести  $\rho g$ . Тогда для нахождения формы поверхности мениска можно использовать уравнение статического мениска:

$$\frac{d^2 r_h}{dz^2} \left[ 1 + \left( \frac{dr_h}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{\rho g h}{\sigma}, \quad (19)$$

с граничным условиями:

$$\frac{dr_h}{dz} = -\text{ctg} \theta_c \quad \text{при } z = 0, \quad \frac{dr_h}{dz} = -\text{ctg} \theta \quad \text{при } z = h_1. \quad (20)$$

Однократное интегрирование соотношения (19) дает:

$$\frac{dr_h}{dz} \left[ 1 + \left( \frac{dr_h}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\rho g}{2\sigma} z^2 + C, \quad (21)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования. Из формулы (21), с учетом граничных условий (20), находим высоту  $h_1$  капли на входе в зону динамического мениска:

$$h_1 = \left( \frac{2\sigma}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2}} (\cos \theta_c - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

где длина  $\sqrt{2\sigma/(\rho g)}$  представляет собой капиллярную постоянную. Величина  $h_1$  является характерным размером зоны динамического мениска, поэтому полагаем, что:

$$r_2 - r_1 = ah_1. \quad (23)$$

Коэффициент пропорциональности  $a$  можно получить либо из экспериментальных данных, либо из численного решения уравнения (19). Подставим соотношения (22), (23) в формулу (18). В результате кинетическое уравнение, описывающее процесс растекания капли неньютоновской жидкости по твердой горизонтальной поверхности, принимает вид:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{n}{2n+1} \left( \frac{2\sigma}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2\sigma}{ak} \right)^{\frac{1}{n}} r_1^{-\frac{1}{n}} (\sin \theta - \sin \theta_c)^{\frac{1}{n}} (\cos \theta_c - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Связь краевого угла  $\theta$  шарообразного сегмента (основной части капли) с радиусом его основания  $r_1$  определим из тригонометрического равенства:

$$\frac{6V}{\pi r_1^3} = 3 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2}, \quad (25)$$

где объем капли  $V = m/\rho$  можно определить, например, экспериментально через массу  $m$  и плотность  $\rho$  капли жидкости.

Система уравнений (24), (25) с единых позиций описывает кинетику растекания капли неньютоновской жидкости в области как острых ( $\theta < \pi/2$ ), так и тупых углов ( $\theta > \pi/2$ ). Чтобы в этом убедиться, введем безразмерные переменные:

- безразмерный радиус:  $R = r_1/r_0$ , где  $r_0 = \sqrt[3]{3V/(2\pi)}$  – радиус основания капли, когда она имеет форму полусферы;
- безразмерное время:

$$\bar{\tau} = \frac{n}{2n+1} \left( \frac{2\pi}{3V} \right)^{\frac{1+n}{3n}} \left( \frac{2\sigma}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2\sigma}{ak} \right)^{\frac{1}{n}} t.$$

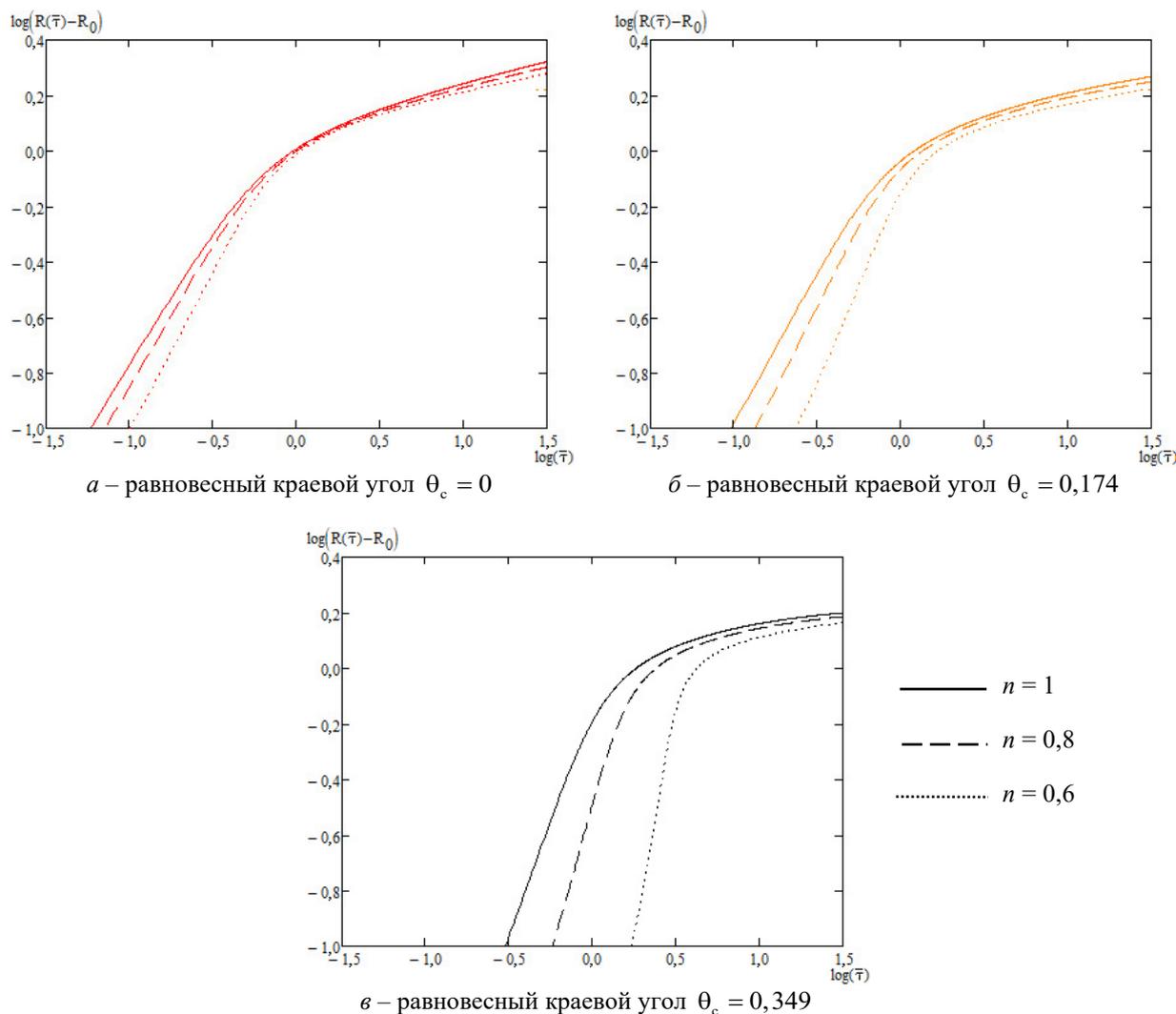
Тогда систему уравнений (24), (25) в безразмерном виде представим как:

$$\frac{dR}{d\bar{\tau}} = \left( \frac{\sin \theta - \sin \theta_c}{R} \right)^{\frac{1}{n}} (\cos \theta_c - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{4}{R^3} = 3 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2}. \quad (26)$$

На рисунке 2 представлены графики кинетики растекания капли неньютоновской вязкой жидкости по твердой поверхности, полученные путем численного решения системы уравнений (26) для различных значений показателя неньютоновского поведения  $n$  и равновесного краевого угла  $\theta_c$ . С возрастанием времени радиус капли увеличивается, тупые краевые углы переходят в острые.

Проанализируем результаты расчетов. Вначале рассмотрим важный практический случай, когда равновесный краевой угол  $\theta_c$  равен нулю:

$$\frac{dR}{d\bar{\tau}} = \left( \frac{\sin \theta}{R} \right)^{\frac{1}{n}} (1 - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{4}{R^3} = 3 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2}. \quad (27)$$



**Рисунок 2. – Кинетика растекания капли для различных значений показателя неньютоновского поведения  $n$  и равновесного краевого угла  $\theta_c$**

Пусть краевой угол  $\theta$  имеет малые значения и лежит в области острых краевых углов ( $\theta < \pi/2$ ). Тогда, разлагая функции  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  в ряд по степеням  $\theta$  и ограничиваясь первыми членами разложения, получим:

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}.$$

В результате система уравнений (27) с точностью до первого порядка малости по  $\theta$  преобразуется к виду:

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{\theta}{\sqrt{2}} \left( \frac{\theta}{R} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{8}{3R^3} = \theta \quad \text{или} \quad R^{\frac{4+3n}{n}} \frac{dR}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{8}{3} \right)^{\frac{1+n}{n}}. \quad (28)$$

Интегрируя уравнение (28) с начальным условием  $R = R_0$  при  $\tau = 0$ , находим:

$$R^{\frac{4(1+n)}{n}} - R_0^{\frac{4(1+n)}{n}} = 2^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1+n}{n} \right) \left( \frac{8}{3} \right)^{\frac{1+n}{n}} \tau. \quad (29)$$

Соотношение (29) при  $R \frac{4(1+n)}{n} \gg R_0 \frac{4(1+n)}{n}$  позволяет записать:

$$R = \left[ 2^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1+n}{n} \right) \left( \frac{8}{3} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right]^{\frac{n}{4(1+n)}} \bar{\tau}^{\frac{n}{4(1+n)}}. \quad (30)$$

которое для ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ) принимает вид:

$$R = 1,587 \cdot \bar{\tau}^{\frac{1}{8}}. \quad (31)$$

Как показано в работе [5], формула (31) удовлетворительно описывает многочисленные экспериментальные данные [6–8] если коэффициент пропорциональности  $a$  в соотношении (23) положить численно равным величине:

$$a = \left| \frac{\rho g}{\sigma} \right|.$$

В статье [6] при экспериментальном исследовании растекания капель полиметилсилоксановых жидкостей с  $\theta_c \approx 0$  по горизонтальным подложкам в области острых краевых углов  $\theta$  было получено эмпирическое уравнение:

$$R = A \cdot \bar{\tau}^{\frac{1}{8}}, \quad (32)$$

которое полностью совпадает с теоретической формулой (31). Значения постоянной величины  $A$  для разных типов твердых подложек (лавсан, стекло, алюминий), а также при изменении вязкости жидкости в 40 раз и изменении объема капли в 10 раз изменялись в пределах  $A = 1,543 - 1,603$ . Сравнение этих экспериментальных значений  $A$  с теоретическим ( $A = 1,587$  из формулы (31)) показывает их вполне удовлетворительное согласие.

При растекании капли неньютоновской вязкой жидкости по твердой поверхности в области тупых краевых углов  $\theta = \pi - \alpha$ , где  $\alpha$  – малая величина, получим:

$$\sin \theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \approx -\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{2}{\alpha}.$$

Тогда система уравнений (27) с точностью до первого порядка малости по  $\alpha$  примет вид:

$$\frac{dR}{d\bar{\tau}} = \sqrt{2} \left( \frac{\alpha}{R} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha = 2^{\frac{1}{3}} R \quad \text{или} \quad \frac{dR}{d\bar{\tau}} = 2^{\frac{3n+2}{6n}}. \quad (33)$$

Интегрирование соотношения (33) с начальным условием  $R = R_0$  при  $\bar{\tau} = 0$  приводит к выражению:

$$R - R_0 = 2^{\frac{3n+2}{6n}} \bar{\tau}. \quad (34)$$

Проанализируем кинетику растекания капли, когда равновесный краевой угол  $\theta_c \in (0, \pi/2)$ . Сначала рассмотрим случай острых краевых углов ( $\theta < \pi/2$ ). Из первого уравнения системы (26) следует, что растекание происходит, когда  $\sin \theta > \sin \theta_c$ , а  $\cos \theta < \cos \theta_c$ ,

т.е. при условии  $\theta > \theta_c$ . Положим  $\theta = \theta_c + \alpha$  и рассмотрим малые значения угла  $\alpha$ . Разложим функции  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  в ряд Тейлора и ограничимся первыми членами разложения:

$$\sin \theta \approx \sin \theta_c + \alpha \cos \theta_c, \quad \cos \theta \approx \cos \theta_c - \alpha \sin \theta_c, \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \approx \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} + \frac{\alpha}{2} \cos^{-2} \frac{\theta_c}{2}.$$

Из последнего соотношения, ограничившись членами первого порядка малости по  $\alpha$ , получим:

$$\operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \approx \operatorname{tg}^3 \frac{\theta_c}{2} + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cos^{-2} \frac{\theta_c}{2}.$$

Тогда первое уравнение системы (26) примет вид:

$$\frac{dR}{d\bar{\tau}} = \alpha^{\frac{2+n}{2n}} \sin^{\frac{1}{2}} \theta_c \left( \frac{\cos \theta_c}{R} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (35)$$

а второе уравнение – вид:

$$\frac{4}{R^3} = 3 \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} + \frac{3\alpha}{2} \cos^{-2} \frac{\theta_c}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\theta_c}{2} + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cos^{-2} \frac{\theta_c}{2} \quad \text{или} \quad \frac{4}{R^3} = \frac{4}{R_c^3} + \frac{3\alpha}{2} \cos^{-4} \frac{\theta_c}{2},$$

где  $R_c$  – радиус, который принимает капля по окончании растекания.

Откуда:

$$\alpha = \frac{8}{3} \frac{R_c^3 - R^3}{R_c^3 R^3} \cos^4 \frac{\theta_c}{2}, \quad (36)$$

а радиус  $R_c$  определяется из условия:

$$\frac{4}{R_c^3} = 3 \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\theta_c}{2} \quad \text{или} \quad R_c = \left( \frac{4}{3 \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\theta_c}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (37)$$

Положим  $R = R_c - r$  и пусть переменная  $r$  является малой величиной. Тогда, ограничиваясь в формуле (36) первыми членами малости по  $r$ , получим:

$$\alpha \approx 8 \frac{r}{R_c^4} \cos^4 \frac{\theta_c}{2} = 8 \frac{R_c - R}{R_c^4} \cos^4 \frac{\theta_c}{2}.$$

В результате уравнение (35) преобразуется к виду:

$$-(R_c - R)^{\frac{2+n}{2n}} d(R_c - R) = \left( \frac{8}{R_c^4} \cos^4 \frac{\theta_c}{2} \right)^{\frac{2+n}{2n}} \sin^{\frac{1}{2}} \theta_c \left( \frac{\cos \theta_c}{R_c} \right)^{\frac{1}{n}} d\bar{\tau}. \quad (38)$$

После интегрирования соотношения (38) с начальным условием  $R = R_0$  при  $\bar{\tau} = 0$  находим:

$$(R_c - R)^{\frac{2-n}{2n}} - (R_c - R_0)^{\frac{2-n}{2n}} = \frac{2-n}{2n} 8^{\frac{2+n}{2n}} \sin^{\frac{1}{2}} \theta_c \cos^{\frac{1}{n}} \theta_c \left( \frac{\cos \theta_c}{2} \right)^{\frac{4+2n}{n}} \bar{\tau}. \quad (39)$$

Рассмотрим кинетику растекания капли по твердой поверхности в области тупых краевых углов  $\theta > \pi/2$ ,  $\theta_c \in (0, \pi/2)$ . Примем, что  $\theta = \pi - \beta$ , где величина угла  $\beta < \pi/2$ . Тогда:  $\sin \theta = \sin(\pi - \beta) = \sin \beta$ ,  $\cos \theta = \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ , и система уравнений (26) преобразуется к виду:

$$\frac{dR}{d\bar{\tau}} = \left( \frac{\sin \beta - \sin \theta_c}{R} \right)^{\frac{1}{n}} (\cos \theta_c + \cos \beta)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{4}{R^3} = 3 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2}. \quad (40)$$

Из первого уравнения системы (40) следует, что растекание капли за счет сил поверхностного натяжения происходит при  $\sin \beta > \sin \theta_c$ , т.е. при  $\beta > \theta_c$ .

Считаем  $\beta = \theta_c + \varepsilon$  и проанализируем случай малых значений угла  $\varepsilon$ . Разложим функции  $\sin \beta$ ,  $\cos \beta$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$  в ряд Тейлора и ограничимся первыми членами разложения:

$$\sin \beta \approx \sin \theta_c + \varepsilon \cos \theta_c, \quad \cos \beta \approx \cos \theta_c - \varepsilon \sin \theta_c, \quad \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \approx \operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \sin^{-2} \frac{\theta_c}{2}.$$

Из последнего соотношения, ограничившись членами первого порядка малости по  $\varepsilon$ , получим:

$$\operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \approx \operatorname{ctg}^3 \frac{\theta_c}{2} - 3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\theta_c}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \sin^{-2} \frac{\theta_c}{2}.$$

Тогда для первого уравнения системы (40) получим:

$$\frac{dR}{d\bar{\tau}} = \sqrt{2} \cos^{\frac{1}{2}} \theta_c \left( \frac{\varepsilon \cos \theta_c}{R} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (41)$$

а для второго уравнения:

$$\frac{4}{R^3} = 3 \operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2} - \frac{3\varepsilon}{2} \sin^{-2} \frac{\theta_c}{2} + \operatorname{ctg}^3 \frac{\theta_c}{2} - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta_c}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \sin^{-2} \frac{\theta_c}{2} \quad \text{или} \quad \frac{4}{R^3} = \frac{4}{R_h^3} - \frac{3\varepsilon}{2} \sin^{-4} \frac{\theta_c}{2},$$

где  $R_h$  – радиус капли, при котором начинается ее растекание по твердой горизонтальной поверхности за счет сил поверхностного натяжения.

Откуда:

$$\varepsilon = \frac{8}{3} \frac{R^3 - R_h^3}{R_h^3 R^3} \sin^4 \frac{\theta_c}{2}, \quad (42)$$

а радиус  $R_h$  вычисляется из условия:

$$\frac{4}{R_h^3} = 3 \operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2} + \operatorname{ctg}^3 \frac{\theta_c}{2} \quad \text{или} \quad R_h = \left( \frac{4}{3 \operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2} + \operatorname{ctg}^3 \frac{\theta_c}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (43)$$

Считаем  $R = R_h + r$  и рассмотрим случай малых значений переменной  $r$ . В формуле (42) ограничимся первыми членами малости по величине  $r$ :

$$\varepsilon \approx 8 \frac{r}{R_h^4} \sin^4 \frac{\theta_c}{2} = 8 \frac{R - R_h}{R_h^4} \sin^4 \frac{\theta_c}{2}.$$

Подставим значение  $\varepsilon$  в уравнение (41):

$$(R - R_h)^{\frac{1}{n}} d(R - R_h) = \sqrt{2} \cos^{\frac{1}{2}} \theta_c \left( \frac{8}{R_h^5} \cos \theta_c \cdot \sin^4 \frac{\theta_c}{2} \right)^{\frac{1}{n}} d\bar{\tau}. \quad (44)$$

Проинтегрировав соотношение (44) с начальным условием  $R = R_0$  при  $\bar{\tau} = 0$ , получим:

$$\text{для } n \neq 1 \quad (R - R_n)^{\frac{n-1}{n}} = (R_0 - R_n)^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n-1}{n} \sqrt{2} \cos^{\frac{1}{2}} \theta_c \left( \frac{8}{R_n^5} \cos \theta_c \cdot \sin^4 \frac{\theta_c}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \bar{\tau}, \quad (45)$$

$$\text{для } n = 1 \quad \ln(R - R_n) = \ln(R_0 - R_n) + \frac{8\sqrt{2}}{R_n^5} \cos^{\frac{3}{2}} \theta_c \sin^4 \frac{\theta_c}{2} \bar{\tau}. \quad (46)$$

Итак, при равновесном краевом угле  $\theta_c = 0$  капля жидкости растекается неограниченно, а при угле  $\theta_c \in (0, \pi/2)$  растекается ограниченно радиусом капли  $R_c$ , определяемым по формуле (37).

### Заключение

Таким образом, разработана теоретическая модель процесса неограниченного и ограниченного растекания капли неньютоновской вязкой жидкости по твердой поверхности. Установлено, что при равновесном краевом угле  $\theta_c = 0$  кинетика перемещения периметра капли неньютоновской вязкой жидкости изменяется неограниченно от зависимости  $R \sim \bar{\tau}$  в области тупых краевых углов  $\theta > \pi/2$  до зависимости  $R \sim \bar{\tau}^{n/(4+4n)}$  в области острых краевых углов  $\theta < \pi/2$ , которые следуют из результатов расчетов и формул (30) и (34). Здесь  $R$  – безразмерный радиус растекающейся капли,  $\bar{\tau}$  – безразмерное время растекания капли. Этот результат получен с единых позиций и хорошо согласуется с многочисленными экспериментальными данными для ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ) [6–8]. Из расчетов и теоретических выкладок найдено, что при равновесном краевом угле  $\theta_c \in (0, \pi/2)$  происходит ограниченное растекание капли до радиуса  $R = R_c = [4 / (3 \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\theta_c}{2})]^{\frac{1}{3}}$  (см. формулу (37)) по закону (39).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Берд, Р.Б. Явления переноса / Р.Б. Берд, В.Е. Стюарт, Е.Н. Лайтфут; пер. с англ. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
2. Миканович, Д.С. Исследование фильтрационных свойств грунтов ограждающих сооружений шламохранилищ с учетом влияния эффекта пристенного скольжения / Д.С. Миканович, Г.Ф. Ласута // Вестник Университета гражданской защиты МЧС Беларуси. – 2019. – Т. 3, № 2. – С. 166–177. – DOI: 10.33408/2519-237X.2019.3-2.166. – EDN: WKMNAK.
3. Нахай, Д.М. Влияние скорости сдвига и температуры на динамическую вязкость раствора полимеров / Д.М. Нахай, Д.С. Миканович, М.О. Бусел // Вестник Университета гражданской защиты МЧС Беларуси. – 2023. – Т. 7, № 2. – С. 215–221. – DOI: 10.33408/2519-237X.2023.7-2.215. – EDN: SXKRDR.
4. Нахай, Д.М. Особенности подъема неньютоновских жидкостей в пористом материале / Д.М. Нахай, В.И. Байков, Д.С. Миканович // Вестник Университета гражданской защиты МЧС Беларуси. – 2024. – Т. 8, № 1. – С. 98–105. – DOI: 10.33408/2519-237X.2024.8-1.98. – EDN: VUPGUK.
5. Байков, В.И. Растекание капли жидкости по твердой горизонтальной поверхности / В.И. Байков, Е.В. Коробко, Н.А. Гончарова // Инженерно-физический журнал. – 2003. – Т. 76, № 2. – С. 38–41.
6. Вавкушевский, А.А. Растекание капли вязкой жидкости по твердой горизонтальной поверхности / А.А. Вавкушевский [и др.] // Коллоидный журнал. – 1989. – Т. 51, № 3. – С. 439–444.
7. Коробко, Е.В. Растекание капли электрореологической суспензии во внешнем поле / Е.В. Коробко, Р.Г. Городкин, В.В. Мельниченко // Инженерно-физический журнал. – 1997. – Т. 70, № 5. – С. 766–770.
8. Рауд, Э.А. Капиллярная модель процесса растекания / Э.А. Рауд, Б.Д. Сумм // Адгезия расплавов и пайка материалов: респ. межвед. сб. – Киев: Наукова думка, 1984. – Вып. 12. – С. 3–7.

**Растекание капли неньютоновской вязкой жидкости  
по твердой горизонтальной поверхности**  
**Spreading of a drop of non-Newtonian viscous liquid over a solid horizontal surface**

**Байков Валентин Иванович**

доктор технических наук, доцент

Государственное научное учреждение  
«Институт тепло- и массообмена имени  
А.В. Лыкова Национальной академии наук  
Беларуси», лаборатория турбулентности,  
главный научный сотрудник

Адрес: ул. П. Бровки, 15,  
220072, г. Минск, Беларусь

Email: baikov@hmti.ac.by

**Valentin I. Baykov**

Grand PhD in Technical Sciences,  
Associate Professor

State Scientific Institution  
«A.V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute  
of the National Academy of Sciences of Belarus»,  
Turbulence Laboratory, Chief Researcher

Address: P. Brovki str., 15,  
220072, Minsk, Belarus

Email: baikov@hmti.ac.by

ScopusID: 6602525113

**Нахай Дмитрий Михайлович**

Государственное учреждение образования  
«Университет гражданской защиты  
Министерства по чрезвычайным ситуациям  
Республики Беларусь», кафедра химической,  
биологической, радиационной и ядерной  
защиты, преподаватель

Адрес: ул. Машиностроителей, 25,  
220118, г. Минск, Беларусь

Email: eurotitaner@mail.ru

**Dmitriy M. Nakhay**

State Educational Establishment «University  
of Civil Protection of the Ministry for Emergency  
Situations of the Republic of Belarus»,  
Chair of Chemical, Biological, Radiation  
and Nuclear Protection, Lecturer

Address: Mashinostroiteley str., 25,  
220118, Minsk, Belarus

Email: eurotitaner@mail.ru

ORCID: 0000-0002-5989-5465

**Миканович Дмитрий Станиславович**

кандидат технических наук, доцент

Государственное учреждение образования  
«Университет гражданской защиты  
Министерства по чрезвычайным ситуациям  
Республики Беларусь», факультет  
предупреждения и ликвидации чрезвычайных  
ситуаций, начальник факультета

Адрес: ул. Машиностроителей, 25,  
220118, г. Минск, Беларусь

Email: dmikanovich@list.ru

SPIN-код: 1516-9648

**Dmitriy S. Mikanovich**

PhD in Technical Sciences, Associate Professor

State Educational Establishment «University  
of Civil Protection of the Ministry for Emergency  
Situations of the Republic of Belarus»,  
Faculty of Emergency Prevention and Elimination,  
Head of Faculty

Address: Mashinostroiteley str., 25,  
220118, Minsk, Belarus

Email: dmikanovich@list.ru

ORCID: 0000-0002-3560-1741

## SPREADING OF A DROP OF NON-NEWTONIAN VISCOUS LIQUID OVER A SOLID HORIZONTAL SURFACE

Baykov V.I., Nakhay D.M., Mikanovich D.S.

*Purpose.* To investigate the kinetics of spreading a drop of a non-Newtonian viscous liquid over a horizontal surface.

*Methods.* Mathematical modeling.

*Findings.* The kinetic equation describing the process of spreading of a drop of non-Newtonian viscous liquid over a solid horizontal surface is obtained.

*Application field of research.* The obtained results are important for further investigation of the motion of non-Newtonian viscous liquids over a solid surface.

*Keywords:* dynamic meniscus, edge angle, equilibrium edge angle.

(The date of submitting: March 28, 2024)

### REFERENCES

1. Byrd R.B., Stewart W.E., Lighfoot E.N. *Transport Phenomena*: translation from English. Moscow: Khimiya, 1974. 688 p. (rus)
2. Mikanovich D.S., Lasuta G.F. Issledovanie fil'tratsionnykh svoystv gruntov ograzhdayushchikh sooruzheniy shlamokhranilishch s uchetom vliyaniya effekta pristennogo skol'zheniya [Effect of wall sliding effect on filtration properties of soils of protecting constructions of slurry storage]. *Journal of Civil Protection*, 2019. Vol.3, No. 2. Pp. 166–176. (rus). DOI: 10.33408/2519-237X.2019.3-2.166. EDN: WKMNAK.
3. Nakhay D.M., Mikanovich D.S., Busel M.O. Vliyanie skorosti sdviga i temperatury na dinamicheskuyu vyazkost' rastvora polimerov [Influence of shear rate and temperature on the dynamic viscosity of a polymer solution]. *Journal of Civil Protection*, 2023. Vol.7, No. 2. Pp. 215–222. (rus). DOI: 10.33408/2519-237X.2023.7-2.215. EDN: SXKRDR.
4. Nakhay D.M., Baykov V.I., Mikanovich D.S. Osobennosti pod"ema nen'yutonovskikh zhidkostey v poristom materiale [Peculiarities of lifting of non-Newtonian fluids in porous material]. *Journal of Civil Protection*, 2024. Vol.8, No. 1. Pp. 98–105. (rus). DOI: 10.33408/2519-237X.2024.8-1.98. EDN: VUPGUK.
5. Baikov V.I., Korobko E.V., Goncharova N.A. Spreading of a liquid droplet over a solid horizontal surface. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2003. Vol. 76, No. 2. Pp. 274–278. DOI: 10.1023/A:1023640831609.
6. Vavkushevskii A.A., Arslanov V.V., Stepanenko V.Yu., Ogarev V.A. Spreading of viscous liquid drop on solid horizontal surface. *Colloid Journal of the USSR*, 1989. Vol. 51, No. 3. Pp. 379–383. EDN: XOASZP.
7. Korobko E.V., Gorodkin R.G., Mel'nichenko V.V. Spreading of a drop of an electrorheological suspension in an external field. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1997. Vol. 70, No. 5. Pp. 763–768. DOI: 10.1007/BF02657635.
8. Raud E.A., Sum B.D. Kapillyarnaya model' protsessa rastekaniya [Capillary model of the spreading process]. *Adgeziya rasplavov i payka materialov [Adhesion of melts and soldering of materials]*. Kiev: Naukova dumka, 1984. Iss. 12. Pp. 3–7. (rus)