УДК 532.528

МЕХАНИКА ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПО ТРУБАМ И РУКАВНЫМ СИСТЕМАМ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Карпенчук И.В., к.т.н., доцент,
Лосик С.А.

Рассмотрено турбулентное движение по трубам и рукавным системам неньютоновских жидкостей. Получены интегральные зависимости для определения распределения скорости, расхода и потерь напора.

Исходя из закона Ньютона о внутреннем трении в жидкости, касательные напряжения возникающие равны [1]:

$$\tau = \mu\gamma, \tag{1}$$

где μ – коэффициент динамической вязкости;

$\gamma = \dfrac{dU}{dy}$ – градиент скорости, называемой скоростью сдвига.

Однако для неньютоновских или аномальных жидкостей это выражение для течения в трубах в более общем виде следует записать так:

$$-\gamma = f(\tau). \tag{2}$$

Знак минус здесь берется потому, что с увеличением y (расстояния от оси трубопровода, рукава) скорость U убывает, т.е. γ отрицательно, а касательное напряжение τ – величина положительная.

Полное суммарное касательное напряжение, возникающее в трубопроводном потоке, обычно определяют как сумму двух напряжений: ньютоновского (вязкостного) $\tau_в$ и дополнительного, так называемого пульсационного (или инерционного), обусловленного турбулентным перемешиванием:

$$\tau = \tau_в + \tau_{пул}. \tag{3}$$

При турбулентном режиме (при больших значениях числа Рейнольдса), который характеризуется интенсивным перемешиванием, значение второго члена в уравнении (3) резко возрастает. В этом случае вязкостным напряжением можно пренебречь и определить полное напряжение как:

$$\tau = \tau_{пул.} = \rho\, l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{l}$ – длина пути перемешивания (она пропорциональна расстоянию от стенки $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\chi}\, \boldsymbol{y}$, где χ – универсальная постоянная).

Исходя из (4) и основываясь на (2) в соответствии с основным уравнением равномерного движения, будем исходить из распределения касательных напряжений Прандтля, т.е.

$$\frac{\tau}{\rho\, l^2} = -\left(\frac{dU}{dy} \right)^2, \text{ или} \tag{5}$$

$$f(\tau) = -\left(\frac{dU}{dy} \right)^2, \tag{6}$$

$$-\frac{dU}{dy} = \sqrt{f(\tau)}. \tag{7}$$

Исходя из установленного ранее общего выражения градиента скорости с учетом (7) и принимая, что скорость у стенки $\boldsymbol{U_r = 0}$, можем записать

$$-\int_{U_y}^{0} dU = \int_{y}^{r} \sqrt{f(\tau)}\, dy. \tag{8}$$

Из общего закона распределения касательных напряжений следует, что

$$y = \frac{r\tau}{\tau_r}, \tag{9}$$

$$dy = \frac{r}{\tau_r} d\tau, \tag{10}$$

тогда из (8) получим:

$$-\int_{U_y}^{0} dU = \frac{r}{\tau_r} \int_{\tau}^{\tau_r} \sqrt{f(\tau)}\, d\tau, \qquad (11)$$

$$U_y = \frac{r}{\tau_r} \int_{\tau}^{\tau_r} \sqrt{f(\tau)}\, d\tau. \qquad (12)$$

Для неньютоновских жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону, функция напряжения сдвига имеет вид [2]:

$$f(\tau) = \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad (13)$$

где $\boldsymbol{n}$ – показатель неньютоновского поведения жидкости (для рассматриваемых нами жидкостей псевдопластиков $\boldsymbol{n} < 1$);

$\boldsymbol{k}$ – степень консистенции, зависящая от вязкости.

Подставим выражение (13) в (12)

$$U_y = \frac{r}{\tau_r} \int_{\tau}^{\tau_r} \sqrt{\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}}\, d\tau. \qquad (14)$$

Интегрируя последнее выражение, получим:

$$U_y = \frac{2n\, r\, \tau_r^{\frac{1}{2n}}}{(1+2n)\, k^{\frac{1}{2n}}} \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^{\frac{1+2n}{2n}}\right]. \qquad (15)$$

Исходим из установленного закона распределения касательных напряжений в поперечном сечении трубы

$$\tau_r = \frac{\Delta p\, r}{2l}, \qquad (16)$$

где Δp – потери давления на расчетном участке;

l – длина расчетного участка.

С учетом выражений (9) и (16) приходим к формуле для распределения скоростей:

$$U_y = \frac{2n}{(1+2n)}\left(\frac{\Delta p}{2l\,k}\right)^{\frac{1}{2n}}\left[r^{\frac{1+2n}{2n}} - y^{\frac{1+2n}{2n}}\right]. \qquad (17)$$

Из формул (7) и (10) расход жидкости определится из выражения

$$Q = \frac{\pi\, r^3}{\tau_r{}^3}\int_0^{\tau_r}\sqrt{f(\tau)}\,\tau^2 d\tau, \qquad (18)$$

$$Q = \frac{\pi\, r^3}{\tau_r{}^3}\int_0^{\tau_r}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{2n}}\tau^2 d\tau, \qquad (19)$$

$$Q = \frac{2n\pi\, r^3}{6n+1}\left(\frac{\tau_r}{k}\right)^{\frac{1}{2n}}. \qquad (20)$$

После замены τ_r на его значение (16) получим выражение для определения потерь давления:

$$\Delta p = \left[\frac{(6n+1)Q}{2n\,\pi}\right]^{2n}\frac{2l\,k}{r^{6n+1}}, \qquad (21)$$

и, следовательно, потери напора на трение равны

$$h_{mp} = \frac{\Delta p}{\rho\, g} = \left[\frac{(6n+1)Q}{2n\,\pi}\right]^{2n}\frac{2l\,k}{r^{6n+1}}. \qquad (22)$$

Полученные аналитические зависимости могут быть использованы для расчетов труб и рукавных систем при течении в них неньютоновских жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович Е.З. Гидравлика. Учебное пособие для вузов. – М.: Недра, 1980. 278 с.
2. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. – М.: Мир, 1964.