

УДК 614.84:681.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО НАГРЕВА ТОКОМ НЕИЗОЛИРОВАННОГО ПРОВОДА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Полева И.И., к.т.н., доцент, Дмитриченко А.С., к.т.н., доцент,
Яновский С.Ю., к.ф.-м.н., Чайчиц Н.И.

Предложена математическая модель по определению температуры токоведущей жилы неизолированного проводника конечной длины при нестационарном нагреве. Используя эту модель, выбираются режимные параметры натуральных испытаний (длина провода, сила тока, условия теплоотдачи с поверхности), при которых расчет температурных полей проводника можно проводить по простым инженерным формулам для проводника бесконечной длины с заданной степенью погрешности.

(Поступила в редакцию 15 июля 2009 г.)

Для повышения эффективности защиты электрических сетей от аварийных режимов и повышения их пожарной безопасности в [1] разработана методика выбора аппаратов защиты, основанная на сопоставлении их защитных характеристик и динамики нестационарного нагрева проводника бесконечной длины в режиме перегрузки. Однако при проведении натуральных испытаний используются проводники конечной длины, в которых необходимо учитывать продольные тепловые потоки и распределение температуры по длине проводника.

В настоящей работе результаты работы [1] развиты для проводников конечной длины и рассмотрена следующая нестационарная задача теплопроводности. Пусть имеется провод длиной $2L$. Провод находится в тепловом равновесии с окружающей средой при температуре T_c . В начальный момент времени по проводу начинает протекать электрический ток, и возникают внутренние источники тепла w_1 . Концы провода зажаты в контакты, температура которых постоянна и равна T_k . С боковой поверхности провода происходит теплоотдача в окружающую среду с температурой T_0 .

Если сечение провода мало, а коэффициент теплопроводности провода велик, то можно считать, что перепад температуры по сечению провода равен нулю. Таким образом, поставленная задача сводится к одномерной задаче, когда перепад температуры происходит только в одном направлении по длине провода. Теплоотдачу с боковой поверхности провода в окружающую среду необходимо учесть в самом дифференциальном уравнении теплопроводности в качестве отрицательного источника тепла.

Таким образом, нестационарное уравнение теплопроводности можно представить в следующем виде:

$$\lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + w_1 - w_2 = c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \quad (1)$$

где w_2 – количество тепла, отдаваемого единицей объема провода в единицу времени в окружающую среду.

Если обозначить площадь сечения провода через S , периметр провода – через P , а длину малого участка провода – через l , то можно записать выражение для w_2 в виде

$$w_2 = \frac{\alpha_1}{Sl} [T(x) - T_0] \cdot Pl = \alpha_1 [T(x) - T_0] \frac{1}{h}, \quad (2)$$

где α_1 – коэффициент теплообмена с боковой поверхности провода,

$h = \frac{S}{P}$ – отношение площади сечения провода к периметру сечения.

Для цилиндрического провода $h = \frac{r_{жс}}{2}$,

где $r_{жс}$ – радиус провода.

Для провода квадратного сечения $h = \frac{a}{4}$,

где a – сторона квадрата и т. д.

Интенсивность тепловыделения в проводнике за счет протекания в нем электрического тока можно записать в виде:

$$w_1 = w_0(1 + \beta T) = \frac{I^2 \gamma_0}{\pi^2 r_{жс}^4} (1 + \beta T). \quad (3)$$

Таким образом, для определения поля температуры в проводнике имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\alpha_1}{c \rho h} [T(x, t) - T_0] + \frac{w_0(1 + \beta T(x, t))}{c \rho} = 0, \quad (-L < x < L). \quad (4)$$

Начальное условие имеет вид:

$$T(x, 0) = T_0 = const. \quad (5)$$

Краевые условия можно написать в виде:

$$T(\pm L, t) = T_k, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (7)$$

Применив к (4)–(7) преобразование Лапласа по переменной t с учетом начального условия (5), получим:

$$a \frac{d^2 \tilde{T}(x, p)}{dx^2} + \frac{\alpha_1 T_0}{c \rho h p} - \frac{\alpha_1 \tilde{T}(x, p)}{c \rho h} + \frac{w_0}{c \rho p} + \frac{w_0 \beta \tilde{T}(x, p)}{c \rho} = p \tilde{T}(x, p) - T_0, \quad (8)$$

$$\tilde{T}(\pm L, p) = T_k / p, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{T}(0, p)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (10)$$

где $\tilde{T}(x, p) = \int_0^{\infty} T(x, t) \exp(-pt) dt$.

Перепишем (8) как:

$$\frac{d^2\tilde{T}(x, p)}{dx^2} - \tilde{T}(x, p) \left(\frac{\alpha_1}{\lambda h} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda} \right) + \frac{T_0}{p} \left(\frac{p}{a} + \frac{\alpha_1}{\lambda h} \right) + \frac{w_0}{\lambda p} = 0. \quad (11)$$

Общее решение уравнения (11) следующее:

$$\tilde{T}(x, p) = C_1 ch(\gamma_1 x) + C_2 sh(\gamma_1 x) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad (12)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}}$ $\gamma_2 = \frac{T_0}{p} \left(\frac{p}{a} + \frac{\alpha_1}{\lambda h} \right) + \frac{w_0}{\lambda p}.$ (13)

Из условия симметрии (10) следует, что $C_2 = 0$. Постоянную C_1 находим из условия (9):

$$\tilde{T}(L, p) = C_1 ch(\gamma_1 L) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = T_k. \quad (14)$$

Откуда

$$C_1 = \left(\frac{T_k - \gamma_2}{p} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \frac{1}{ch(\gamma_1 L)}. \quad (15)$$

Следовательно, решение краевой задачи (8)–(10) имеет вид:

$$\tilde{T}(x, p) - \frac{T_0}{p} = \frac{(T_k - T_0) ch(\gamma_1 x)}{ch(\gamma_1 L)} - \frac{w_0(1 + \beta T_0) ch(\gamma_1 x)}{\lambda p \left(\frac{p}{a} + \frac{\alpha_1}{h\lambda} - \frac{w_0\beta}{\lambda} \right) ch(\gamma_1 L)} + \frac{w_0(1 + \beta T_0)}{\lambda p \left(\frac{p}{a} + \frac{\alpha_1}{h\lambda} - \frac{w_0\beta}{\lambda} \right)}. \quad (16)$$

Для перехода в (16) от изображений к оригиналам используем теорему разложения [3]. Представим первое слагаемое в (16) в виде отношения обобщенных полиномов:

$$F_1(p) = \frac{ch(x\sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}})}{p \cdot ch(L\sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}})} = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}. \quad (17)$$

Находим корни полинома:

$$\Psi(p) = p \cdot ch(L\sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}}) = 0. \quad (18)$$

1) $p = 0$ – простой нулевой корень; (19)

2) множество корней:

$$ch(L\sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}}) = \cos(iL\sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}}) = 0, \quad (20)$$

$$\mu_n = iL \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}} = (2n-1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Из (21) находим:

$$p_n = - \left(\frac{a\mu_n^2}{L^2} + \frac{\alpha a}{\lambda h} - \frac{w_0\beta a}{\lambda} \right). \quad (22)$$

Найдем значение $\Psi'(p)$ при $p = p_n$:

$$\Psi'(p) = ch \left(L \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}} \right) + p \frac{L}{2a} \frac{sh \left(L \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}} \right)}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}}}, \quad (23)$$

$$\Psi'(p_n) = p_n \frac{L}{2a} \frac{sh \left(\frac{\mu_n}{i} \right)}{\frac{\mu_n}{iL}} = - \frac{\sin \mu_n}{2\mu_n} \left(\mu_n^2 + \frac{\alpha}{\lambda h} L^2 - \frac{w_0\beta L^2}{\lambda} \right). \quad (24)$$

По теореме разложения

$$L^{-1} [F_1(p)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(p_n)}{\Psi'(p_n)} \exp(-p_n t), \quad (25)$$

$$F_1(Fo) = \frac{ch(\tilde{x} \sqrt{K^2 Bi - P\beta})}{ch \sqrt{K^2 Bi - P\beta}} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n \tilde{x}) \exp \left[-(\mu_n^2 + BiK^2 - P\beta) Fo \right], \quad (26)$$

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1} 2\mu_n}{\mu_n^2 + K^2 Bi - P\beta} \quad \mu_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad P = \frac{w_0 L^2}{\lambda} \quad Bi = \frac{\alpha h}{\lambda} \quad Fo = \frac{at}{L^2} \quad K = \frac{L}{h}. \quad (27)$$

Найдем оригинал второго слагаемого в (16):

$$F_2(p) = \frac{ch \left(x \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}} \right)}{p \cdot \left(\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda} \right) ch \left(L \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}} \right)} = \frac{\Phi(p)}{\Psi_1(p)}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1'(p) &= \left(\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda} \right) ch \left(L \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}} \right) + p \cdot ch \left(L \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}} \right) + \\ &+ p \left(\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda} \right) \frac{L}{2a \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}} \right)} sh \left(L \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} + \frac{p}{a} - \frac{w_0\beta}{\lambda}} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

$\Psi_1(p)$ имеет два простых корня:

$$p_1 = 0, \tag{30}$$

$$p_2 = \frac{w_0 \beta a}{\lambda} - \frac{\alpha a}{\lambda h}, \tag{31}$$

и множество корней вида (21).

Отсюда по теореме разложения

$$L^{-1}[F_2(p)] = \frac{\Phi(0)}{\Psi_1'(0)} + \frac{\Phi(p_2)}{\Psi_1'(p_2)} \exp(-p_2 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(p_n)}{\Psi_1'(p_n)} \exp(-p_n t), \tag{32}$$

где p_n определяются из соотношения (22).

Подставляя (30), (31) и (22) в (32) после упрощений получим:

$$\frac{\Phi(0)}{\Psi_1'(0)} = \frac{ch(x \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} - \frac{w_0 \beta}{\lambda}})}{\left(\frac{\alpha_1 a}{h\lambda} - \frac{w_0 \beta a}{\lambda}\right) ch(L \sqrt{\frac{\alpha_1}{h\lambda} - \frac{w_0 \beta}{\lambda}})}. \tag{33}$$

$$\frac{\Phi(p_1)}{\Psi_1'(p_1)} = \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_1 a}{h\lambda} + \frac{w_0 \beta a}{\lambda}\right)t}{\left(-\frac{\alpha_1 a}{h\lambda} + \frac{w_0 \beta a}{\lambda}\right)}, \tag{34}$$

$$\frac{\Phi(p_n)}{\Psi_1'(p_n)} = \frac{L^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos(\mu_n \tilde{x})}{\mu_n^2} \exp\left[-(\mu_n^2 + BiK^2 - P\beta)Fo\right]. \tag{35}$$

Наконец, последний член в (16) имеет оригинал:

$$L^{-1} \left[\frac{1}{p \left(\frac{p}{a} + \frac{\alpha_1 a}{h\lambda} - \frac{w_0 \beta a}{\lambda} \right)} \right] = \frac{1}{\left(\frac{\alpha_1 a}{h\lambda} - \frac{w_0 \beta a}{\lambda} \right)} \left[1 - \exp \left[-t \left(\frac{\alpha_1 a}{h\lambda} - \frac{w_0 \beta a}{\lambda} \right) \right] \right]. \tag{36}$$

Объединяя (26), (33)–(36), окончательно получим решение поставленной задачи в следующем виде

$$T(\tilde{x}, Fo) = T_0 + (T_k - T_0) \frac{ch(\tilde{x} \sqrt{K^2 Bi - P\beta})}{ch \sqrt{K^2 Bi - P\beta}} + \frac{P(1 + T_0 \beta)}{(BiK^2 - P\beta)} \left[1 - \frac{ch(\tilde{x} \sqrt{K^2 Bi - P\beta})}{ch \sqrt{K^2 Bi - P\beta}} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(T_k - T_0 + \frac{P(1 + T_0 \beta)}{\mu_n^2} \right) \cos(\mu_n \tilde{x}) \exp\left[-(\mu_n^2 + BiK^2 - P\beta)Fo\right], \tag{37}$$

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1} 2\mu_n}{\mu_n^2 + K^2 Bi - P\beta} \quad \mu_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}.$$

При $\beta = 0$ из (37) мы получаем решение задачи для случая, когда сопротивление проводника не зависит от температуры

$$T(\tilde{x}, Fo) = T_0 + (T_k - T_0) \frac{ch(\tilde{x}K\sqrt{Bi})}{chK\sqrt{Bi}} + \frac{P}{BiK^2} \left[1 - \frac{ch\tilde{x}K\sqrt{Bi}}{chK\sqrt{Bi}} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(T_k - T_0 + \frac{P}{\mu_n^2} \right) \cos(\mu_n \tilde{x}) \exp \left[-(\mu_n^2 + BiK^2) Fo \right] \quad (38)$$

При $Fo \rightarrow \infty$ из (37) мы получаем решение стационарной задачи:

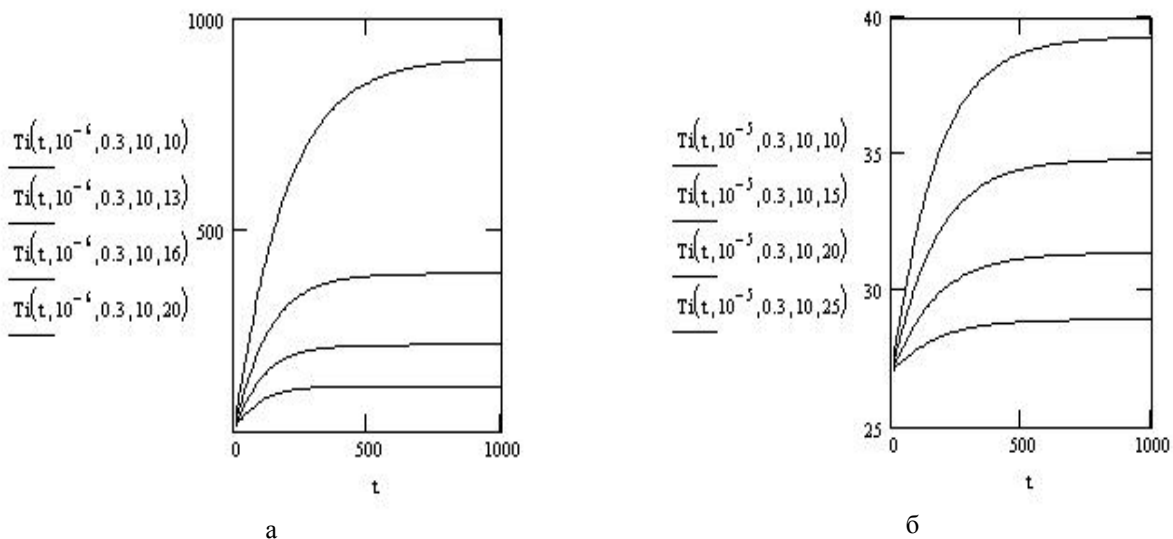
$$\theta(\tilde{x}) = 1 + \frac{(\theta_k - 1)ch(\tilde{x}\sqrt{Bi_1 - Po_1B})}{ch(K\sqrt{Bi_1 - Po_1B})} + \frac{Po_1(1+B)}{Bi_1 - Po_1B} \left[1 - \frac{ch(\tilde{x}\sqrt{Bi_1 - Po_1B})}{ch(K\sqrt{Bi_1 - Po_1B})} \right], \quad (39)$$

где $\theta = \frac{T}{T_c}$; $\theta_k = \frac{T_k}{T_c}$; $\tilde{x} = \frac{x}{h}$; $Bi_1 = \frac{\alpha_1 h}{\lambda}$; $Po_1 = \frac{w_0 h^2}{\lambda T_c}$; $B = \beta T_c$.

На основании аналитического соотношения (37) в среде Mathcad разработана программа расчета распределения температуры по длине провода с течением времени. Точность расчета по соотношению (37) (выбор числа членов ряда) проверялась при помощи численного обращения решения в области преобразований по Лапласу (16).

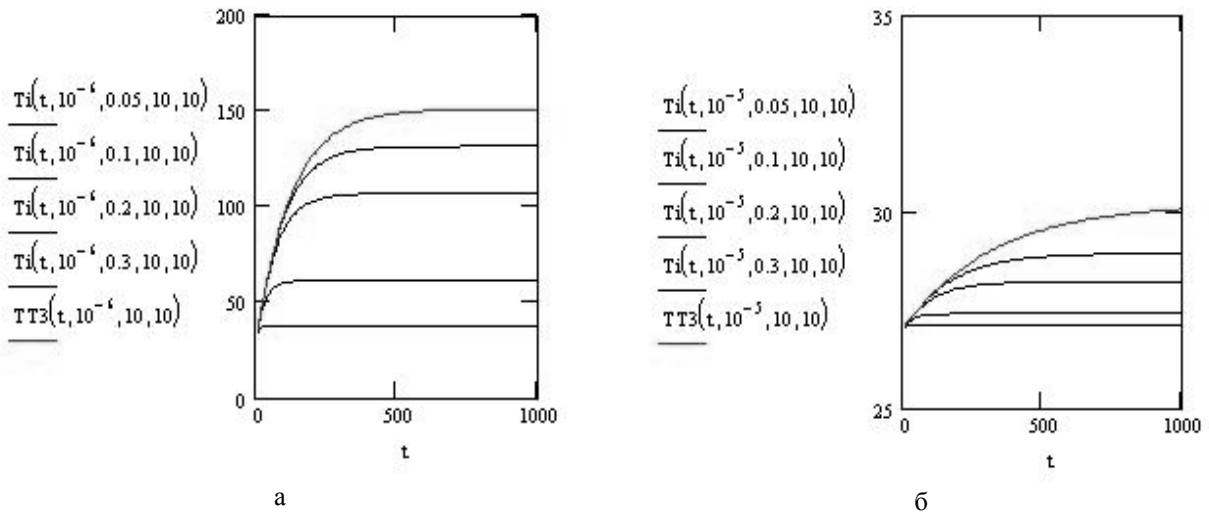
На рисунке 1 показана зависимость изменения температуры от времени в центре медного провода двух сечений при разных силах тока. Как видно из приведенных зависимостей, температура в проводнике возрастает с ростом силы тока и уменьшением сечения проводника. Время выхода на стационарные значения температуры зависит от силы тока и условий теплообмена с окружающей средой.

На рисунках 2 и 3 показана зависимость изменения температуры от времени в центре медного и алюминиевого проводов двух сечений при разных значениях его длины. Как видно из приведенных зависимостей, чем короче провод, тем больше сказывается отток тепла в контакты, что приводит к уменьшению его температуры. Приближение бесконечно длинного цилиндрического проводника можно выбирать, если продольный тепловой поток будет много меньше радиального $L/d \ll 1$. Отклонения от этой модели будут наибольшими у концов проводника, где охлаждение идет в основном за счет теплопроводности в торцы, а не за счет конвекции.



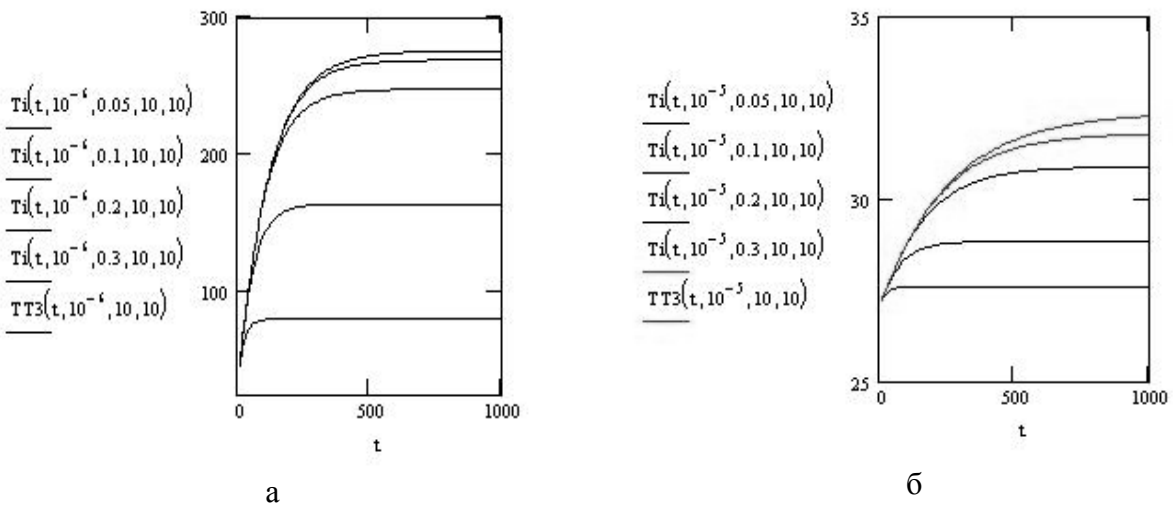
Длина провода – 0,6 м; а – сечение 1 мм²; б – сечение 10 мм², коэффициент теплоотдачи с поверхности провода равен 10 Вт/м²·град, начальная температура провода и окружающей среды -25 °С.

Рисунок 1 – Зависимость изменения температуры от времени в центре медного провода при значениях тока 10, 13, 15, 16, 20, 25 А



а – сечение 1 мм², б – сечение 10 мм²
 Коэффициент теплоотдачи с поверхности провода – 10 Вт/м²·град, сила тока – 10 А. Начальная температура провода и окружающей среды 25 °С.

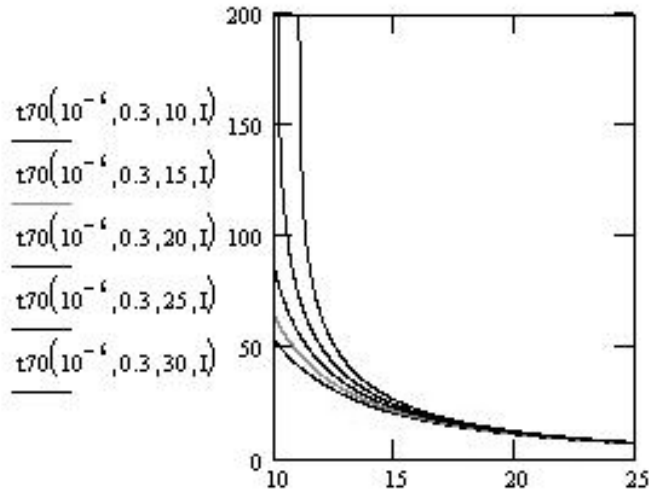
Рисунок 2 – Зависимость изменения температуры от времени в центре медного провода при разных значениях его длины 0,1; 0,2; 0,4; 0,6 м и бесконечно длинный провод



а – сечение 1 мм², б – сечение 10 мм²
 Коэффициент теплоотдачи с поверхности провода 10 Вт/м²·град, сила тока 10 – А.
 Начальная температура провода и окружающей среды – 25 °С.

Рисунок 3 – Зависимость изменения температуры от времени в центре алюминиевого провода при значениях его длины 0,1; 0,2; 0,4; 0,6 м и бесконечно длинный провод

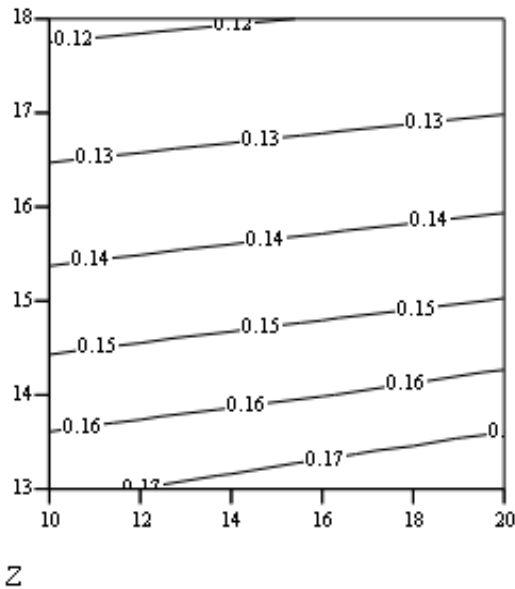
На основе формулы (37) была решена обратная задача по определению времени, за которое проводник достигает определенной температуры. На рисунке 4 показана зависимость времени достижения температуры 70 °С в центре медного провода от тока при разных значениях коэффициента теплоотдачи с поверхности провода. Как видно из приведенных зависимостей, время достижения опасной температуры уменьшается с увеличением силы тока и уменьшением коэффициента теплоотдачи.



Длина провода – 0,6 м, сечение – 1 мм².
Начальная температура провода и окружающей среды 25 °С.

Рисунок 4 – Зависимость времени достижения температуры 70 °С в центре медного провода от тока при разных значениях коэффициента теплоотдачи с поверхности провода 10, 15, 20, 25 и 30 Вт/м²·град

Для оценки влияния конечной длины провода на точность вычисления температуры проводника по модели бесконечного [1] и конечного цилиндров была построена поверхность значений длины проводника над полем значений силы тока и коэффициента теплообмена, которая дает заданную погрешность вычисления температуры.



Линии уровня соответствуют значениям длины проводника, при которых погрешность вычисления заданной температуры по формуле для бесконечного и конечного проводников составляет 1 %.

Рисунок 5 – Контурный график поверхности значений длины медного проводника сечением 1 мм² над полем значений силы тока и коэффициента теплоотдачи

Таким образом, используя результаты данной работы (разработанную программу), можно выбирать режимные параметры натуральных испытаний (длина провода, сила тока, условия теплоотдачи с поверхности), при которых расчет температурных полей можно проводить по простым инженерным формулам для проводника бесконечной длины с заданной степенью погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриченко, А.С. Моделирование нестационарного нагрева током одиночного проводника при аварийных режимах работы электросети / А.С. Дмитриченко, А.А. Иванович, Н.И. Чайчиц // Чрезвычайные ситуации: предупреждение и ликвидация. – 2007. – № 1 (21). – С. 28–35.
2. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М. : Высш. шк., 1967. – 600 с.
3. Диткин, В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М. : Физматгиз, 1961. – 350 с.