УДК 614.842.615

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПЕНООБРАЗОВАТЕЛЕЙ, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ СТЕПЕННОМУ РЕОЛОГИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ

Карпенчук И.В., к. т. н., доцент, Шатило Э.Э.
Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь

e-mail: mail@kii.gov.by

Рассмотрена теория движения по трубам и рукавным системам неньютоновских жидкостей при турбулентном режиме. Жидкости подчиняются степенному реологическому закону. Получены интегральные зависимости для определения распределения скорости, расхода, потерь напора и коэффициента гидравлического трения. Проведены сравнительный анализ и сопоставление полученных результатов с данными отечественных и зарубежных исследований. Сделаны выводы и рекомендации о возможности применения рассмотренной теоретической модели.

We consider the theory of motion of the pipes and hose systems, non-Newtonian fluids in turbulent regime. Rheological fluid obeys a power law. The integrated function to determine the velocity distribution, flow, pressure loss and the coefficient of hydraulic friction. A comparative analysis and comparison of results with national and international research. The conclusions and recommendations on the applicability of the theoretical model considered.

(Поступила в редакцию 20 июня 2011 г.)

При течении растворов пенообразователей основным фактором реологии является проявление эффекта Томса. Проявление эффекта Томса присуще всем растворам поверхностно-активных веществ (ПАВ), особенно в присутствии водорастворимых высокомолекулярных соединений.

Рассмотрим течение жидкости, которое образуется при течении растворов пенообразователей.

По закону Ньютона о внутреннем трении в жидкости касательные напряжения τ равны:

$$\tau = \pm \mu\dot{\gamma}, \tag{1}$$

где μ – коэффициент динамической вязкости;

$\dot{\gamma} = du/dy$ – градиент скорости, называемый скоростью сдвига.

Полное суммарное касательное напряжение, возникающее в турбулентном потоке, определяют как сумму двух напряжений, ньютоновского (вязкостного) – $\tau_в$ и дополнительного, так называемого пульсационного $\tau_{пул}$ (или инерционного), обусловленного турбулентным перемешиванием [1]:

$$\tau = \tau_в + \tau_{пул}. \tag{2}$$

В системах пожаротушения, особенно при работе в экстремальных режимах, имеет место развитый турбулентный режим (большие числа Рейнольдса), значение второго параметра $\tau_{пул}$ по сравнению с первым, резко возрастает. В этом случае (первое допущение) вязкостным напряжением $\tau_в$ можно пренебречь и определять напряжение как [1, 2]:

$$\tau = \rho l^2 (du/dy)^2, \tag{3}$$

где l – длина пути перемешивания, которая пропорциональна расстоянию от стенки.

Тогда в соответствии с моделью, предложенной Прандтлем, можно записать:

$$\frac{\tau}{\rho l^2} = \left(\frac{du}{dy}\right)^2, \tag{4}$$

или, положив, что $f(\tau) = \dfrac{\tau}{\rho l^2}$, (5)

$$f(\tau) = \left(\frac{du}{dy}\right)^2, \quad \text{или} \quad -\frac{du}{dy} = \sqrt{f(\tau)}. \tag{6}$$

Знак минус здесь берется потому, что с увеличением расстояния от оси трубопровода, скорость *u* убывает, т. е. $\dot{\gamma}$ отрицателен, а касательное напряжение τ – величина существенно положительная .

С целью получения распределения скорости принимаем, что скорость потока на стенке трубопровода равна нулю $u_r = 0$, тогда можно записать:

$$-\int_{U_y}^{0} du = \int_{y}^{r} \sqrt{f(\tau)}dy. \tag{7}$$

Исходя из общего уравнения равномерного движения для турбулентного потока, общего закона распределения касательных напряжений как для ламинарного, так и для турбулентного режимов, следует:

$$y\tau_r = r\tau, \tag{8}$$

где *r* – радиус трубопровода;

τ – касательное напряжение на расстоянии ***y*** от оси трубопровода;

τ_r – касательное напряжение на стенке трубопровода.

Продифференцировав (8), выразим *dy*:

$$dy = \left(\frac{d}{2\tau_r}\right)d\tau. \tag{9}$$

Радиус трубопровода заменен на диаметр, т. к. именно диаметр является характерным размером трубопровода. Подставив (10) в (8), получим:

$$-\int_{u_y}^{0} du = \left(\frac{d}{2\tau_r}\right)\int_{\tau}^{\tau_r} \sqrt{f(\tau)}d\tau. \tag{10}$$

Проинтегрировав, получим:

$$u_y = \left(\frac{d}{2\tau_r}\right)\int_{\tau}^{\tau_r} \sqrt{f(\tau)}d\tau. \tag{11}$$

Для неньютоновских жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону, функция напряжения сдвига имеет вид [3]:

$$f(\tau)=\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{12}$$

где k – мера консистенции жидкости (чем выше вязкость, тем больше значение k (но для неньютоновских жидкостей их нельзя сравнивать);

n – характеристика степени неньютоновского поведения жидкости (чем больше значение n отличается от единицы – тем сильнее проявляются ее неньтоновские свойства).

Подставив выражение (12) в (11), получим:

$$u_y=\left(\frac{d}{2\tau_r}\right)\int_{\tau}^{\tau_r}\sqrt{\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}}d\tau=\left(\frac{d}{2\tau_r}\right)\int_{\tau}^{\tau_r}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{2n}}d\tau. \tag{13}$$

После подстановки пределов интегрирования и преобразований получим выражение для определения распределения скорости:

$$u_y=\frac{dn}{1+2n}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{2n}}\left[1-\left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^{\frac{1+2n}{2n}}\right]. \tag{14}$$

Однако в данном выражении не определено касательное напряжение как таковое. Используем известный закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении трубы:

$$\tau_r=\frac{\Delta pr}{2l}=\frac{\Delta pd}{4l}, \tag{15}$$

где Δp – потери давления на расчетном участке;

l – длина расчетного участка.

С учетом выражений (8), (14) и (15) после преобразований получаем формулу для распределения скорости в радиальном сечении, т. е. от оси трубы:

$$u_y=\frac{2n}{(1+2n)}\left(\frac{\Delta p}{2lk}\right)^{\frac{1}{2n}}\left[r^{\frac{2n+1}{2n}}-y^{\frac{2n+1}{2n}}\right]. \tag{16}$$

где r – радиус трубы.

В [1] получено общее выражение для расхода жидкости:

$$Q=\frac{\pi r^3}{\tau_r^3}\int_0^{\tau_r}f(\tau)\tau^2 d\tau\,. \tag{17}$$

Интегрирование этого выражения дает возможность получить необходимое для выполнения практических расчетов соотношения между расходом и перепадом давления при любом виде функции *f(τ)* [4]. Рассмотрим решение этой задачи. Подставив в уравнение (17) значение *f(τ)* с учетом (15) и (12), получим:

$$Q=\frac{\pi r^3}{\tau_r{}^3}\int_0^{\tau}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{2n}}\cdot\tau^2 d\tau. \tag{18}$$

После подстановки пределов интегрирования получим следующее выражение:

$$Q = \frac{\pi r^3 2n}{6n+1}\left(\frac{\tau_r}{k}\right)^{\frac{1}{2n}}. \qquad (19)$$

Подставим в полученное выражение расхода значение касательного напряжения на стенке (15):

$$Q = \frac{\pi r^3 2n}{6n+1}\left(\frac{\Delta pr}{2lk}\right)^{\frac{1}{2n}}. \qquad (20)$$

После преобразований получим выражение для определения потерь давления:

$$\Delta p = \left[\frac{(6n+1)Q}{n\pi}\right]^{2n} \frac{2^{2(2n+1)} lk}{d^{6n+1}}. \qquad (21)$$

Следовательно, потери напора равны

$$\Delta h = \left[\frac{(6n+1)Q}{n\pi}\right]^{2n} \frac{2^{2(2n+1)} lk}{\rho g d^{6n+1}}. \qquad (22)$$

Для получения значения коэффициента гидравлического трения (коэффициента Дарси) воспользуемся формулой Дарси – Вейсбаха:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} . \rho \frac{\vartheta^2}{2}, \qquad (23)$$

где λ – коэффициент гидравлического трения,

υ – средняя скорость потока.

Используя формулу (23), после преобразований получим:

$$\lambda = \left(\frac{6n+1}{n}\right)^{2n} \frac{8k}{\rho \vartheta^{2(1-n)} d^{2n}}. \qquad (24)$$

Обобщенную зависимость для определения коэффициента сопротивления λ при турбулентном течении в трубах неньютоновских жидкостей дали Додж и Метцнер [5], положив в основу логарифмический закон Кармана, установленный для ньютоновских жидкостей.

Обобщенная зависимость Доджа – Метцнера имеет вид:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{4}{n^{0,75}} \lg\left[\mathrm{Re}' \lambda^{1-0,5n}\right] - \frac{0,4}{n^{1,2}}, \qquad (25)$$

где Re' – обобщенный критерий Рейнольдса [6, 7].

$$\mathrm{Re}' = \frac{\rho \vartheta^{2-n} d^n}{8^{n-1} k}. \qquad (28)$$

В УО «Белорусский государственный технический университет» (БНТУ) были проведены серии экспериментов по определению коэффициента гидравлического трения при течении растворов высокомолекулярного полимера – полиэтиленоксида WSR-301. По результатам экспериментов была получена зависимость [8]:

$$\lambda = 0,11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25}\left[0,475 + \frac{1}{\exp 1,45(15c+1)}\right], \qquad (29)$$

где c – весовая концентрация сухого полимера в растворе, %.

Для определения применимости предлагаемых теоретических исследований движения жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону определялись зависимости

$$\lambda = f\left(\mathrm{Re}'\right). \tag{30}$$

Результаты расчетов по формулам (24), (25), (29) при одинаковых значениях обобщенного критерия Рейнольдса представлены на рис. Анализ графиков, представленных на рис., показывает, что зависимости Доджа – Метцнера хорошо работают только при значении обобщенного критерия Рейнольдса $\mathrm{Re}' > 3000$.

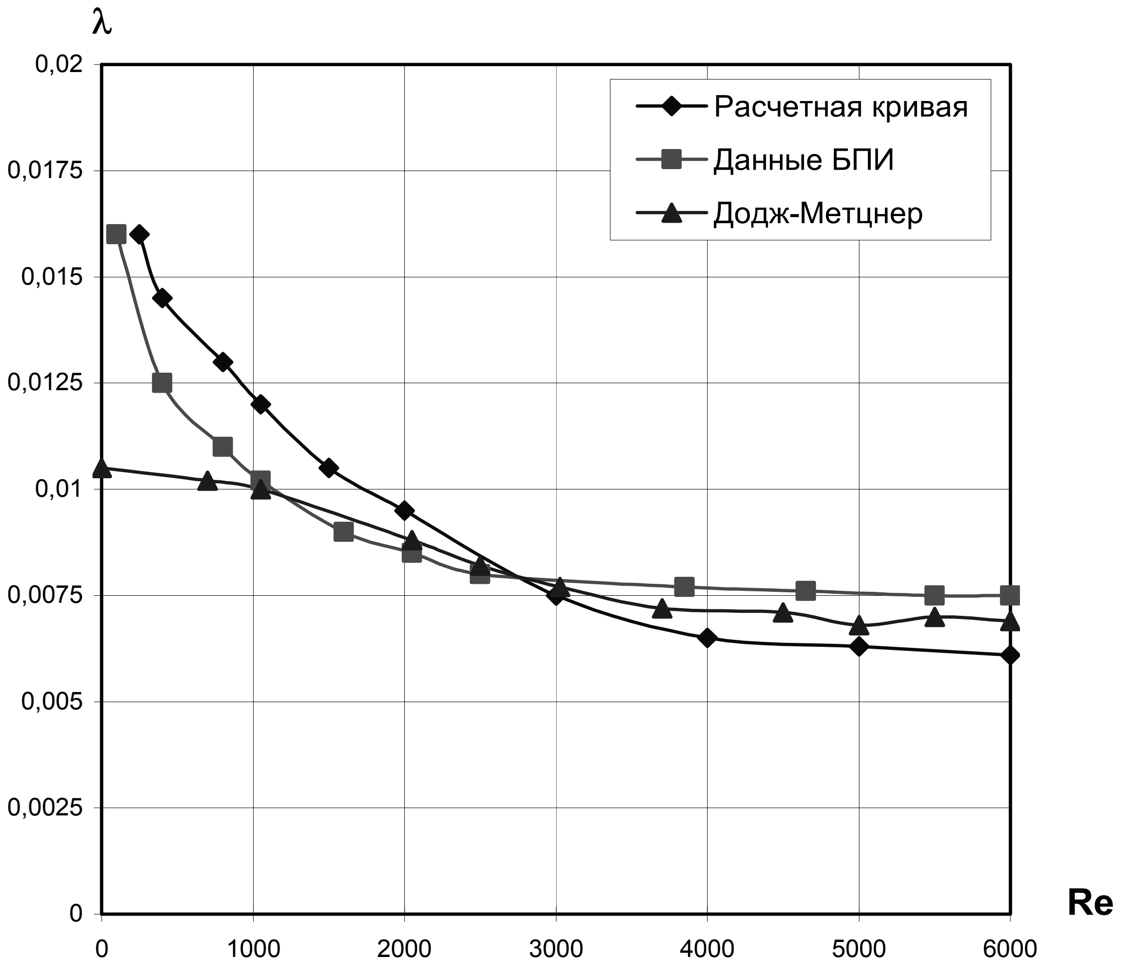

Рисунок – Зависимость расчетных, экспериментальных данных и данных Доджа – Метцнера (при *Q* = 1,12 л/с, *V* = 14,3 м/с, *C* = 0,005-0,2 %)

В то время как результаты исследований, выполненных в БНТУ, и данных теоретических исследований имеют хорошую сходимость. Максимальное отклонение расчетных данных в пределах $\mathrm{Re}' = 1000 - 6000$ от данных Доджа – Метцнера и БНТУ не превышает 9 %, а коэффициент линейной корреляции равен 0,94.

Рассмотренная математическая модель турбулентного движения неньютоновских жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону, и полученные расчетные зависимости могут быть использованы для расчетов стационарных систем пожаротушения насосно-рукавных систем при работе в экстремальных условиях с использованием растворов пенообразователей.

Литература

1. Рабинович, Е.З. Гидравлика : учеб. пособие для вузов / Е.З. Рабинович. – М. : Недра, 1980. – 278 с.
2. Карпенчук, И.В. Турбулентное движение по трубам и рукавным системам неньютоновских жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону / И.В. Карпенчук, С.А. Лосик // Чрезвычайные ситуации: предупреждение и ликвидация. – 2005.– № 7 (17). – С. 15–21.
3. Уилкинсон, У.Л. Неньютоновские жидкости / У.Л. Уилкинсон. – М. : Мир, 1964.
4. Прандтль, С.М. Гидроаэромеханика / С.М. Прандтль. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 576 с.
5. Dodge D.M., Metzner A.B. Reologica Acta, 205, (August, 1958).
6. Одельский, Э.Х. Методические указания по гидродинамике структурно-вязких сред (неньютоновские жидкости) / Э.Х. Одельский. – Минск : БПИ, 1969. – 18 с.
7. Исследовать факторы, влияющие на изменение гидродинамического сопротивления. Провести теоретические исследования механики движения растворов пенообразователей с учетом неньютоновского поведения: отчет о НИР / Командно-инженерный институт ; рук. И.В. Карпенчук. – Минск, 2008. – 37 с. – № ГР2008.117.
8. Теоретические и экспериментальные исследования перспективных систем снижения гидродинамического сопротивления и создание инженерных методов расчета параметров пограничного слоя при их использовании / Б.И. Пурис [и др.]. – Минск : ИТМО АН БССР, 1981. – 165 с.